MATEMÁTICAS I

EJERCICIOS DE REFUERZO

1. Escribe en forma de potencia de exponente, opera y simplifica:
   a) $\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[3]{x^2}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a}}$ c) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a^7}$ d) $\sqrt[5]{2^3} : \sqrt{2}$ e) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}$
   f) $\dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt{5}}$ g) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3^4}$ h) $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ i) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a}$ j) $\sqrt[4]{x^5} : \sqrt{x}$

2. Calcula y simplifica al máximo las siguientes expresiones:
   a) $\sqrt{\dfrac{84}{45}}\sqrt{\dfrac{21}{15}}$ b) $\sqrt{80}-3\sqrt{45}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{\dfrac{30}{45}}\sqrt{\dfrac{12}{10}}$
   e) $\sqrt{147}-2\sqrt{243}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$ g) $\sqrt{18}\sqrt{\dfrac{45}{10}}$ h) $\sqrt{98}-2\sqrt{18}$
   i) $\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$ j) $\sqrt{\dfrac{2}{27}}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ k) $\sqrt{48}-2\sqrt{12}$ l) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

3. Expresa en forma de intervalo los números que verifican:
   a) $|x-4|\le 2$ b) $|x-5|\le 2$ c) $|x+1|\le 4$ d) $|x+2|\ge 3$ e) $|x-2|\ge 5$
   f) $|2-x|\ge 2$ g) $2|4x-1|>9$ h) $\left|x-\dfrac{3}{2}\right|\ge 1$ i) $|1-x|+|3x-1|>1$

4. Escribir como una desigualdad en valor absoluto los siguientes intervalos:
   a) $-3<x<7$ b) $(2, 12)$ c) $0\le x\le 6$ d) $[-4, 2]$ e) $-3<x<5$
   f) $E_5(2)$ g) $3\le x\le 12$ h) $-12<x<2$ i) $[-4, 12]$ j) $E_3(-1)$

5. Sabiendo que $lg_a x = 5$ y $lg_a y = 2$ calcular $b = lg_a\left(\dfrac{x^3\sqrt{y}}{y^3}\right)$

6. Calcular a^{15} y $a^{3/2}$ sabiendo que $a^{1/5} = 1/3$.

7. Sabiendo que $lg_a x = \sqrt{3}$, calcular: *a)* $lg_{a^3}x$ *; b)* $lg_{a^n}x$ *; c)* $lg_x a$ *; d)* $lg_a x^3$ *; e)* $lg_{a^2}(ax^3)$

8. Sabiendo que $x=\left(1+\frac{1}{2}\right)^3$ e $y=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$, demostrar que $x^y = y^x$

9. Sabiendo que $\log_5 N = h$, determina el logaritmo en base 5 de N/125.

10. Halla el valor de 'x' en las siguientes expresiones: a) $\log_2\frac{1}{16} = x$; b) $\log_x 125 = 3$; c) $\log_3 x = 4$.

11. Se sabe que log2 = 0,3 y log3 = 0,48. Calcula: a) log216; b) log75; c) $\log\sqrt{0{,}002}$; d) $\log\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:
    a) $5^{2x-1}=\sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$ b) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0$ c) $3^{2(x+1)}-28\cdot 3^x+3=0$
    d) $5^x-97\cdot 5^{x/2}+6^4=0$ e) $10^{3-x}=1$ f) $2^{2x}+2^{2x-1}+2^{2(x-1)}+2^{2x-3}+2^{2(x-2)}=1984$
    g) $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}=960$ h) $3^x+3^{1-x}=4$ i) $4e^{-3x}-5e^{-x}+e^x=0$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:
    a) $3\log x-\log 32=\log(x/2)$ b) $\log_2 x\cdot\log_x 2x\cdot\log_{2x}y=\log_x x^2$
    c) $2\log x = 3+\log(x/10)$ d) $5\log\frac{x}{2}+2\log\frac{x}{3}=3\log x-\log\frac{32}{9}$

14. Resuelve los sistemas:
    a) $\begin{cases}\log x+\log y=2\\ x-y=20\end{cases}$ b) $\begin{cases}\log x-\log y=1\\ x+y=22\end{cases}$ c) $\begin{cases}\log_x(y-8)=2\\ \log_y(x+3)=1/2\end{cases}$ d) $\begin{cases}\log_x(y+9)=2\\ \log_y(9-x)=1/2\end{cases}$

15. Desarrolla las potencias siguientes:

a) $(3x - 2)^4$ b) $(2x^4 + 5x)^5$ c) $(2x^2 + 3y)^5$ d) $\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)^5$

e) $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5$ f) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)^4$ g) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$ h) $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$

i) $\left(2x - \frac{1}{x^3}\right)^6$ j) $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ k) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ l) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)^5$

16. Escribe directamente el cuarto término del desarrollo de $(x + y)^9$ y el quinto del desarrollo de $(2x - y)^8$.

17. Escribe el término 6º del desarrollo de la potencia siguiente, y averigua su grado: $(3x - x^3)^9$.

18. Escribe y simplifica el tercer término del desarrollo de $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^7$.

19. Escribe y simplifica el término central del desarrollo de $\left(\frac{x^2}{9} + \frac{1}{x^3}\right)^4$.

20. ¿Cuál es el grado del término central del desarrollo de $(3x^2 - 5x^4)^{12}$?

21. Averigua qué valor deber darse a x para que el tercer término del desarrollo de $\left(\frac{3}{x} - x\right)^5$ sea igual a 90.

22. El tercer término del desarrollo de $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^n$ es de segundo grado. Calcula n y desarrolla la potencia del binomio.

23. El segundo término del desarrollo de $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ es de grado 11. Escribe los términos restantes.

24. Averigua si hay algún término del desarrollo de $\left(2x^2 + \frac{5}{x}\right)^6$ que sea de grado 3. Si lo hay, escríbelo.

25. Averigua el lugar que ocupa el término de grado 13 en el desarrollo de la potencia $(3x - x^2)^8$

1. a) $\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[3]{x^2}=x^{4/6}\cdot x^{2/3}=x^{2/3}\cdot x^{2/3}=x^{4/3}=\sqrt[3]{x^4}=x\sqrt[3]{x}$
   b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a}}=\dfrac{a^{5/3}}{a^{1/2}}=a^{7/6}=\sqrt[6]{a^7}=a\sqrt[6]{a}$
   c) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a^7}=a^{1/3}\cdot a^{7/2}=a^{23/6}=a^3\sqrt[6]{a^5}$
   d) $\sqrt[5]{2^3}\div\sqrt{2}=2^{3/5}\div 2^{1/2}=2^{1/10}=\sqrt[10]{2}$
   e) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}=x^{2/5}\cdot x^{2/3}=x^{16/15}=\sqrt[15]{x^{16}}=x\sqrt[15]{x}$
   f) $\dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{5^{3/4}}{5^{1/2}}=5^{1/4}=\sqrt[4]{5}$
   g) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3^4}=3^{1/4}\cdot 3^{4/2}=3^{1/4}\cdot 3^2=3^{9/4}=3^2\sqrt[4]{3}=9\sqrt[4]{3}$
   h) $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{a^{3/2}}{a^{2/3}}=a^{5/6}=\sqrt[6]{a^5}$
   i) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a}=a^{2/3}\cdot a^{1/2}=a^{7/6}=\sqrt[6]{a^7}=a\sqrt[6]{a}$
   j) $\sqrt[4]{x^5}:\sqrt{x}=x^{5/4}:x^{1/2}=x^{3/4}=\sqrt[4]{x^3}$

2. a) $\sqrt{\dfrac{84}{45}}\cdot\sqrt{\dfrac{21}{15}}=\sqrt{\dfrac{84\cdot 21}{45\cdot 15}}=\sqrt{\dfrac{2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 3\cdot 7}{3^2\cdot 5\cdot 3\cdot 5}}=\sqrt{\dfrac{2^2\cdot 7^2}{3\cdot 5^2}}=\dfrac{2\cdot 7}{5}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{14}{5}.\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{14}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{14\sqrt{3}}{15}$
   b) $\sqrt{80}-3\sqrt{45}=\sqrt{2^4\cdot 5}-3\sqrt{3^2\cdot 5}=4\sqrt{5}-9\sqrt{5}=-5\sqrt{5}$
   c) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}=\dfrac{6+5+2\sqrt{30}}{6-5}=\dfrac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$
   d) $\sqrt{\dfrac{30}{45}}\sqrt{\dfrac{12}{10}}=\sqrt{\dfrac{30\cdot 12}{45\cdot 10}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3}{3^2\cdot 5\cdot 2\cdot 5}}=\sqrt{\dfrac{2^2}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
   e) $\sqrt{147}-2\sqrt{243}=\sqrt{3\cdot 7^2}-2\sqrt{3^5}=7\sqrt{3}-18\sqrt{3}=-11\sqrt{3}$
   f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}=\dfrac{4-\sqrt{2}}{8-1}=\dfrac{4-\sqrt{2}}{7}$
   g) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{\dfrac{45}{10}}=\sqrt{\dfrac{18\cdot 45}{10}}=\sqrt{\dfrac{3^2\cdot 2\cdot 3^2\cdot 5}{2\cdot 5}}=\sqrt{3^4}=3^2=9$
   h) $\sqrt{98}-2\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 7^2}-2\sqrt{2\cdot 3^2}=7\sqrt{2}-6\sqrt{2}=\sqrt{2}$
   i) $\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{6}+3\sqrt{3})\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{18}+9}{4\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{2\cdot 3^2}+9}{12}=\dfrac{3\sqrt{2}+9}{12}=\dfrac{3\sqrt{2}}{12}+\dfrac{9}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{\sqrt{2}+3}{4}$
   j) $\sqrt{\dfrac{2}{27}}\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot 3}{27\cdot 2}}=\sqrt{\dfrac{3}{3^3}}=\sqrt{\dfrac{1}{3^2}}=\dfrac{1}{3}$
   k) $\sqrt{48}-2\sqrt{12}=\sqrt{2^4\cdot 3}-2\sqrt{2^2\cdot 3}=4\sqrt{3}-4\sqrt{3}=0$
   l) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{(2+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\dfrac{6-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2}{9-2}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$

3. a) $[2, 6]$ b) $[3, 7]$ c) $[-5, 3]$
   d) $(-\infty, -5\,]\cup[\,1, +\infty)$ e) $(-\infty, -3]\cup[\,7, +\infty)$ f) $(-\infty, 0\,]\cup[\,4, +\infty)$
   g) $(-\infty, -\frac{7}{8})\cup(\frac{11}{8}, +\infty)$ h) $(-\infty, \frac{1}{2}]\cup[\frac{5}{2}, +\infty)$ i) $(-\infty, 0)\cup(\frac{1}{2}, +\infty)$

4. a) $|x-2|<5$ b) $|x-7|<5$ c) $|x-3|\le 3$ d) $|x+1|<3$ e) $|x-1|<4$
   f) $|x-5|<2$ g) $|x-\frac{15}{2}|<\frac{9}{2}$ h) $|x+5|<7$ i) $|x-4|\le 8$ j) $|x+1|<3$

5. $b = 3\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - 3\log_a y = 3\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 2 - 3\cdot 2 = 10$

6. $a^{15} = a^{75/5} = (a^{1/5})^{75} = (1/3)^{75}$ $a^{3/2} = (a^{1/5})^{15/2} = (1/3)^{15/2}$

7. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{n}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$
8. (*)
9. h – 3
10. a) x = –4 b) x = 5 c) x = 81
11. a) 2,34 b) 1,88 c) –1,35 d) 0,4
12. a) $x_1 = ½$; $x_2 = 1/5$ b) x = 3 c) $x_1 = 1$; $x_2 = –2$ d) $x_1 = 2\log_5 81$; $x_2 = 2\log_5 16$
    e) x = 3 f) x = 5 g) x = 9 h) $x_1 = 0$: $x_2 = 1$ i) $x_1 = 0$; $x_2 = \ln 2$
13. a) x = 4 b) y = 4 c) x = 100 d) x = 3
14. a) $x = 10(1 + \sqrt{2})$; $y = 10(\sqrt{2} - 1)$ b) x = 20: y = 2
    c) x = –1/6; y = 289/36 d) x = 5; y = 16
15. a) $81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16$
    b) $32x^{20} + 400x^{17} + 2000x^{14} + 5000x^{11} + 6250x^8 + 3125x^5$
    c) $32x^{10} + 240x^8y + 720x^6y^2 + 1080x^4y^3 + 810x^2y^4 + 243y^5$
    d) $7848\sqrt{3} - 9612\sqrt{2}$ e) $241\sqrt{3}/27 + 101\sqrt{2}/9$ f) 324
    g) $x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$ h) $x^6 + 6x^4\sqrt{x} + 15x^3 + 20x\sqrt{x} + \frac{6}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} + 15$
    i) $64x^6 - 192x^2 + \frac{240}{x^2} - \frac{160}{x^6} + \frac{60}{x^{10}} - \frac{12}{x^{14}} + \frac{1}{x^{18}}$ j) $x^4 - 4x^2\sqrt{x} + 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$
    k) $x^2\sqrt{x} - 5x\sqrt{x} + 10\sqrt{x} - \frac{10}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ l) $\frac{1}{x^5} - \frac{5}{x^7} + \frac{10}{x^9} - \frac{10}{x^{11}} + \frac{5}{x^{13}} - \frac{1}{x^{15}}$
16. $84x^6y^3$ $1120x^4y^4$
17. $-10206x^{19}$
18. $84x^{13}$
19. $6/81x^2$
20. 36
21. x = 3
22. n = 4; $x^8 + 12x^4 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$
23. n = 7; $x^{14} - 7x^{11} + 21x^8 - 35x^5 + 35x^2 - \frac{21}{x} + \frac{7}{x^4} - \frac{1}{x^7}$
24. $20000x^3$
25. Sexto término

1. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:
   a) $36x^3 - 60x^2 + 31x - 5 = 0$ b) $216x^6 - 35x^3 + 1 = 0$
   c) $25x^5 - 65x^4 + 46x^3 + 2x^2 - 7x - 1 = 0$ d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
   e) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ f) $x^3 - x - 6 = 0$
   g) $3x^4 + 15x^2 = 0$ h) $x^4 - 16 = 0$
   i) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0$ j) $2x^3 - 7x^2 + 4x + 3 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:
   a) $\frac{1}{x-1} + 3x = 7$ b) $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{7}{2}$ c) $\frac{5}{x-2} + \frac{x-6}{(x-2)^2} = 2$
   d) $\frac{4}{3(x^2-1)} + \frac{5}{9} = \frac{5}{x+1} - \frac{2}{3}$ e) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{40}{x^2-4}$ f) $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$
   g) $\frac{4x+2}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1}$ h) $\frac{x+4}{3} - \frac{7-x}{x-3} = \frac{4x+7}{9} - 1$ i) $\frac{\frac{1}{3}}{x} = \frac{1-x}{x+\frac{1}{3}}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:
   a) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$ b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$ c) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = \sqrt{3x-8}$
   d) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$ e) $\sqrt{3x-6} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{9x+4}$ f) $\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}} = 1$
   g) $x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{5}{3}} = 1056$ h) $\sqrt[4]{5x^2+3x-11} = \sqrt{4x-7}$ i) $\sqrt{x^2+x+4} = 2 + \sqrt{x^2-2x+1}$

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss:
   a) $\left.\begin{array}{r} x-y+2z=6 \\ 2x+y-3z=-5 \\ -3x+6y+4z=-1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x+3y-z=2 \\ 2x-5y-4z=0 \\ x+2y+z=6 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x-y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} x-3y-z=1 \\ 2x-6y-2z=1 \\ 3x-9y-3z=1 \end{array}\right\}$
   e) $\left.\begin{array}{r} x-y+5z=13 \\ 3x-2y+z=12 \\ x+y+2z=9 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ 3x+y+2z=1 \\ 2x-y+3z=0 \end{array}\right\}$ g) $\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=0 \\ 2x-3z=0 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{r} x+3y-z+t=0 \\ 2x+2y+z+t=-2 \\ 4x+3y-z+t=-3 \\ x+5y+z-t=6 \end{array}\right\}$

5. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:
   a) $\left.\begin{array}{r} x^2-y^2=8 \\ xy=-3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-4x-6y+11=0 \\ x^2+y^2-6x-8y+21=0 \end{array}\right\}$
   d) $\left.\begin{array}{r} 2x+y^2-y=4 \\ y^2-3=x \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r} 2x^2-10y^2=8 \\ x^2-3y^2=6 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r} xy=\frac{x^2}{2}-2x-6 \\ y=x^2-4x-12 \end{array}\right\}$

6. Resuelve las siguientes inecuaciones:
   a) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-1}{3} < 2x-1$ b) $4x+9-2(3x-5) \geq \frac{x+1}{3} - 1$ c) $\frac{x-9}{5} - \frac{5x-13}{15} \leq \frac{4x}{3} + 10$
   d) $(3x+1)^2 - 5x^2 + 2x \leq (2x-1)^2$ e) $4|7-3x| - 5 \leq 3$ f) $(x-6)(x^2+1) < 0$
   g) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$ h) $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$ i) $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4} < 0$

j) $\frac{5-2x}{3x-9}<1$ k) $\frac{4}{x^2-9x+18}\geq 0$ l) $\frac{x^2+1}{5x}\leq\frac{1}{2}$

m) $\frac{x-1}{x+1}>\frac{x+1}{x-1}$ n) $\frac{x-5}{x}+5\geq x$ ñ) $\frac{2x}{x^2+1}<1$

7. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2-4x<8 \\ 7x+2>2x-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3-2x\geq 7x+12 \\ 2x+3<3x-15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4-3(x-1)>2x-3 \\ 3(x-1)+1\geq -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2\leq 6x+7 \\ 2x-3<4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x^2-3x>5 \\ x-1<3x+2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y-x\leq 1 \\ y-2x\leq -3 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} y\leq 3x+1 \\ y\leq -4x+16 \\ x\geq 0 \\ 4\geq y\geq 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} y>x^2-3x+2 \\ x-y>0 \end{cases}$

8. Se repartieron 720 € entre tres obreros en partes proporcionales a sus jornales (sueldo que cobra cada uno al día). Al primero, cuyo jornal era de 100 €, le correspondió una parte igual al jornal del tercero. El jornal del segundo era de 120 €. Calcula lo que recibió cada obrero.

9. Hallar tres números naturales consecutivos, cuyo producto es igual a 15 veces el segundo.

10. Dos ciclistas parten al mismo tiempo y del mismo punto para un pueblo situado a 90 km. El primero, que recorre por hora un kilómetro más que el segundo, tarda una hora menos que éste en hacer el recorrido. ¿Con qué velocidad marchó cada uno de los ciclistas?

11. Cuando dos bombas de agua actúan a la vez, tardan en agotar un pozo 15 horas. Si actuara sólo la menor, tardaría en agotarlo 16 horas más que si actuara sólo la mayor. ¿Cuánto tardaría ésta en solitario?

12. El dividendo de una división es 1081; el cociente y el resto son iguales, y el divisor es el doble del cociente. ¿Cuánto vale el divisor?

13. Construye una ecuación de segundo grado, sabiendo que el cociente de sus dos soluciones es 5 y la diferencia entre las mismas es 12.

14. Se han repartido 210 € entre tres obreros, en partes proporcionales a las horas que cada uno trabajó. Al segundo le correspondieron 120 €; el número de horas que trabajó el tercero es igual al número de euros que correspondió al primero, y el número de euros que correspondió al tercero es igual al número de horas que trabajó el segundo. ¿Qué número de horas trabajó cada operario y cuánto correspondió a cada uno en el reparto?

15. Un comerciante vendió 385 kg entre café y azúcar, obteniendo por cada género 390 €. Sabiendo que el kg de café vale 5,30 € más que el de azúcar. ¿Cuántos kg vendió el comerciante de cada género?

16. Calcula un número positivo cuyo doble, aumentado en su cuadrado sea igual a su cubo.

17. Calcula el valor de *a* para que las dos raíces de la ecuación $25x^2 - (a + 46)x + a = 0$ se diferencien en dos unidades.

18. Dos ciclistas parten al mismo tiempo de dos puntos A y B, distantes 320 km: uno, de A, con dirección a B, y otro, de B, con dirección a A. El primero recorrió 8 km más por hora que el segundo, y el número de horas que tardaron en encontrarse está representado por la mitad del número de kilómetros que el segundo recorrió en una hora. ¿Cuál es la distancia recorrida por cada ciclista en el momento de encontrarse?

19. Un contratista compró 4000 m^3 de piedra y los vendió por 11250 €. ¿Cuánto pagó el por la piedra si ganó en relación a lo que pagó un tanto por ciento igual a 5 veces el número de euros que a él le costó el metro cúbico de piedra?

20. Dadas las ecuaciones $(7a – 2)x^2 – (5a – 3)x + 1 = 0$ y $8bx^2 – (4b + 2)x + 2 = 0$, averigua qué valores deben tener *a* y *b* para que las dos ecuaciones tengan las mismas soluciones.

21. Un moderno barco tiene un sistema de propulsión mediante velas rígidas y direccionables de un nuevo material, con lo que puede aprovechar el empuje del viento. Dispone también de un motor convencional de gasoil. Se carga el barco con 360 toneladas de gasoil que debe repartirse por igual entre cada uno de los días de navegación. Las condiciones meteorológicas permitieron que se empezara navegando 4 días a vela, lo cual hizo aumentar en 3 toneladas la cantidad de gasoil disponible diariamente. ¿Durante cuánto tiempo pudo navegar el barco sin repostar si no volvieron a hacer uso de las velas?

22. Se han mezclado dos substancias: de la primera entran 18 hectolitros; el precio de la segunda es de 5 € el hectolitro, y el precio de la sustancia mezclada es de 4,25 € el hectolitro. Calcula el precio de la primera sustancia y la cantidad de la segunda sustancia que entra en la mezcla.

23. Un capital colocado a interés simple, al 4% durante cierto tiempo ha producido 2400 €, y otro capital, que excede al anterior en 4000 €, impuesto al 3% durante dos años más ha producido unos intereses de 3600 €. Calcula el valor del primer capital.

24. Un comerciante compra mercancías por las cuales paga al contado una cierta suma y un 4% de ella por gastos de transporte. Las vende por 390 €, y gana un tanto por ciento sobre el precio de compra, sin incluir el del transporte, igual a 1/12 del coste total. ¿Cuánto le costaron las mercancías?

25. Se mezcla cierta cantidad de una sustancia de precio 7 €/kg con 8 kg de otra que cuesta a 3 €/kg y con 6 kg de una tercera sustancia que cuesta a 6 €/kg. ¿Qué cantidad de kg de la primera sustancia hay que mezclar para que el precio resultante de la mezcla sea igual al número de kg de esa sustancia?

26. Hallar una fracción cuyo denominador exceda en dos unidades al numerador sabiendo que dicha fracción excede en 1/10 a la que se obtiene disminuyendo en una unidad cada uno de los términos de la fracción buscada.

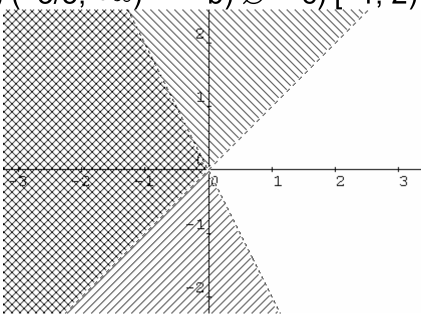
27. Dada la ecuación $x^2 + 2x + m = 0$, averigua el valor de m para que sea igual a la diferencia de las soluciones.

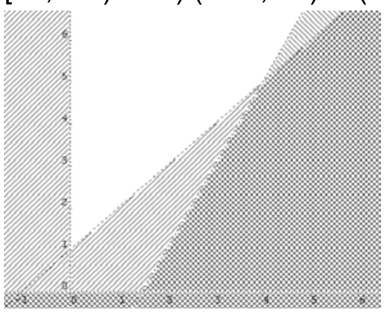
28. La media proporcional (geométrica) y la media aritmética de dos números que se diferencian en 32 están en una relación de 3/5. Halla esos números.

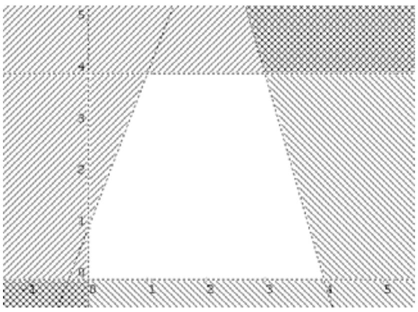
29. Hallar un número de tres cifras, sabiendo: que la cifra de las unidades es igual al producto de las otras dos, que la cifra de las decenas es media proporcional entre las otras dos y que la inversa de la cifra de las centenas es igual a la inversa de la cifra de las decenas más el doble de la inversa de la cifra de las unidades.

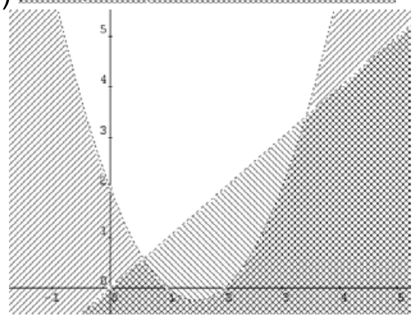
30. Una persona hace en coche un viaje de 33 km por un sendero forestal y observa que ha recorrido por hora 3 km más que cuando lo hizo a caballo. Regresa a pie, andando 3 km por hora menos que a caballo, y tarda, entre ida y vuelta, 9 horas y 36 minutos. ¿A qué velocidad iba cuando hizo el recorrido a caballo?

1. a) $x_1 = ½$; $x_2 = 1/3$; $x_3 = 5/6$ b) $x_1 = ½$; $x_2 = 1/3$ c) $x_1 = -1/5$ (doble); $x_2 = 1$ (triple)
   d) $x = \pm 1$; $x = \pm 2$ e) $x = 1$ f) $x = 2$ g) $x = 0$
   h) $x = \pm 2$ i) $x_1 = -½$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ j) $x = 3/2$; $x = 1 \pm \sqrt{2}$
2. a) $x_1 = 4/3$; $x_2 = 2$ b) $x_1 = 15/7$; $x_2 = 4$ c) $x_1 = 3$; $x_2 = 4$
   d) $x_1 = 23/11$; $x_2 = 2$ e) $x_1 = -4$; $x_2 = 4$ f) $x = \pm\sqrt{6}$
   g) $x_1 = -1$; $x_2 = 3$ h) $x_1 = 5$; $x_2 = 21$ i) $x = 1/3$
3. a) $x = \pm 1$ b) $x = 5$ c) $x = 4$ d) $x = 9$ e) $x = 5$
   f) $x = 4$ g) $x = 64$ h) $x = 4$ i) $x_1 = 5/7$; $x_2 = 3$
4. a) $x = 1$; $y = -1$; $z = 2$ b) $x = -163/6$; $y = 11/3$; $z = -109/6$ c) $x = ½$; $y = ½$; $z = 0$
   d) Incompatible e) $x = 4$; $y = 1$; $z = 2$ f) $x = 1 - z$; $y = z + 2$
   g) $x = 3\lambda/2$; $y = 9\lambda/4$; $z = \lambda$ h) $x = -1$; $y = 1$; $z = 0$; $t = -2$
5. a) $(x_1, y_1) = (1, -3)$; $(x_2, y_2) = (-1, 3)$ b) $(x_1, y_1) = (1/3, ½)$; $(x_2, y_2) = (-½, -1/3)$
   c) $(x_1, y_1) = (3, 2)$; $(x_2, y_2) = (1, 4)$ d) $(x_1, y_1) = (1, 2)$; $(x_2, y_2) = (-9/2, -5/3)$
   e) $(x_1, y_1) = (3, 1)$; $(x_2, y_2) = (3, 1)$; $(x_3, y_3) = (3, -1)$; $(x_4, y_4) = (-3, -1)$
   f) $(x_1, y_1) = (-2, 0)$; $(x_2, y_2) = (6, 0)$; $(x_3, y_3) = (1/3, -55/4)$
6. a) $x \in (1, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 59/7]$ c) $x \in [-82/11, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, 0]$
   e) $[5/3, 3]$ f) $x \in (-\infty, 6]$ g) $[1, 2] \cup [3, +\infty)$ h) $(-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$
   i) $(3, 5] \cup (-2, 2)$ j) $(-\infty, 14/5) \cup (3, +\infty)$ k) $(-\infty, 3) \cup (6, +\infty)$
   l) $(-\infty, 0) \cup [½, 2]$ m) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ n) $(-\infty, 0) \cup [1, 5]$ ñ) $x \neq 1$
7. a) $(-3/5, +\infty)$ b) $\varnothing$ c) $[-1, 2)$ d) $[-1, 7/2)$ e) $(-3/2, -1) \cup (5/2, +\infty)$

f) 

g) 

h) 

i) 

8. 180 €, 216 € y 324 € resp.
9. 3, 4, 5; –5, –4, –3; –1, 0, 1
10. 10 km/h y 9km/h resp.
11. 24 h (la mayor)
12. 23
13. $x^2 - 18x + 45 = 0$
14. 15 h, 30 €; 60h, 120 €; 30 h, 60 €.
15. 325 kg de azúcar y 60 kg de café
16. 2
17. $a_1 = 24$; $a_2 = -16$
18. 192 km y 128 km resp.
19. 10000 €
20. $a = 2$; $b = 3$
21. 24 días
22. Nº hl = 102 – 24·precio
23. 6000 € o 20000 €
24. 312 € (transporte incluido)
25. 5kg
26. 3/5
27. $\pm 2\left(1-\sqrt{2}\right)$
28. 4 y 36
29. 248 30. 8 km/h

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1. ¿Existe un ángulo "x" tal que senx = ½ y cosx = ¼? ¿Puede Ser el seno de un ángulo 1/8?
2. Calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α:
   a) senα=1/4 y α ∈ al primer cuadrante   b) senα = –1/3 y α ∈ al tercer cuadrante.
3. Dibuja un ángulo cuyo seno sea el doble que su coseno.
4. Calcula en cada caso el valor de las demás razones trigonométricas considerando que x está en el primer cuadrante: a) senx = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) cosx = 0,8 c) tgx = 2.
5. Calcula el seno, el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante del ángulo de 1110º.
6. Dibuja ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima el valor de sus razones trigonométricas. a) senα = –½ ; tgα > 0   b) tgβ = 1; cos β < 0.
7. Calcula senx, tgx, secx, cosecx, y cotgx, si cosx = 0,6 y tgx < 0.
8. ¿Para qué ángulos es senα = –cosα?
9. Escribe en grados sexagesimales, centesimales y en radianes, el ángulo que forman las agujas del reloj cuando son: a) las 6:00; b) las 3:00; c) las 10:00.
10. Expresa en grados sexagesimales: a) $\frac{\pi}{4}$ rad; b) $\frac{3\pi}{4}$ rad; $\frac{5\pi}{4}$ rad y $\frac{4\pi}{3}$ rad.
11. Completa la tabla:

Radianes	$\frac{\pi}{3}$			π		$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	
Grados		30	45		225			330		270

12. Halla las razones trigonométricas de α:
    a) cosα = 3/5 y α ∈ 4º cuadrante   b) cosα = –1/3 y α ∈ 2º cuadrante;
    c) tgα = –2/5 y α ∈ 2º cuadrante   d) secα = –3/2 y α ∈ 3er cuadrante.
13. Puede ser cierto: a) senα = 1/5 y cosα = 2/5; b) senx = 1/3 y tgx = 1/9.
14. Si un ángulo está situado en el tercer cuadrante. ¿Qué signo tienen: la cotangente, la cosecante y la secante de ese ángulo?
15. Si un ángulo está situado en el segundo o tercer cuadrante, ¿se puede asegurar que su tangente es negativa?
16. Si tgα = 4 y α ∈ [180, 270], calcula el valor de las restantes razones trigonométricas.
17. Usando calculadora resuelve: senx = 0,6018; cosy = 0,6428; tgz = 2,7475; cotgα = 2,1445.
18. Si el seno de α es 0,8 y el ángulo α no pertenece al primer cuadrante. Halla las demás razones trigonométricas.
19. Si la tangente de α es 1/2 y el ángulo α pertenece al tercer cuadrante. Halla las demás razones trigonométricas
20. Si secα = –2 y α no pertenece al tercer cuadrante calcular el resto de las razones trigonométricas.
21. Si tgα = 3/2 y no pertenece al primer cuadrante halla las demás razones trigonométricas.
22. Dibuja un ángulo agudo tal que su seno sea 3/5.
23. Calcula en función de las razones trigonométricas de ángulos conocidos las razones de: 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º, 330º.
24. Calcular las razones trigonométricas de 15º en función de ángulos de razones conocidas.
25. Estudia que ángulos pueden tener las siguientes relaciones entre sus razones trigonométricas considerando que α pertenece al primer cuadrante:
    a) senα = senβ   b) cosα = –cosβ   c) senα = –cosβ   d) tgα = tgβ.
26. Sin calculadora calcula las razones trigonométricas de los ángulos: a) 765º; b) –240º.
27. Sabiendo que sen 37º = 0,6. Calcula las razones de 53º.

28. Sabiendo que cos 37º = 0,8. Calcula las razones de 143º.
29. Sabiendo que el sen 20º = 0,342. Calcula el seno del ángulo 40º.
30. Calcula las razones trigonométricas de 150 utilizando las razones del ángulo de 30º.
31. Las razones trigonométricas del ángulo de 20º son: sen20º = 0,342; cos20º = 0,94; tg20º = 0,364. Calcula las razones trigonométricas de 70º.
32. Las razones trigonométricas del ángulo de 53º son: sen53º = 0,8; cos53º = 0,6; tg53º = 4/3. Calcula las razones trigonométricas de 143º.
33. Si sen12º = 0,2 y sen 37º = 0,6, calcula: a) sen49º; cos49º; tg49º b) sen25º; cos25º; tg25º.
34. Calcula las razones trigonométricas de 215º si tg35º = 0,7.
35. Calcular las razones trigonométricas de: 150º, –225º, 480º, –660º, –1770º, 1440º.
36. Si α es un ángulo del 2º cuadrante, tal que senα = 3/5. Representar α, π – α, π + α, –α y calcular el seno de cada uno de ellos.
37. Halla el ángulo complementario de 25º39'18''. ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y su complementario?
38. Halla el ángulo suplementario de 135º38'16''. ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y el de su suplementario?
39. Sabiendo que senα = 4/5 y que α está en el primer cuadrante. Halla las razones trigonométricas de 2α y α/2.
40. Calcula las razones trigonométricas de –1200º, 570º y 10π/3 rad.
41. Hallar las razones trigonométricas de 75º y 3000º.
42. Relaciona entre sí, las razones trigonométricas de los ángulos 3625º y 4025º.
43. Sabiendo que tgα =1/2, halla tg(α + 45º) y tg(45 – α).
44. Sabiendo que cos36º = 0,8090. Halla las razones trigonométricas de los ángulos 9º y 6º.
45. Sabiendo que sen20º = 0,342, calcula las razones trigonométricas de 40º.
46. Sabiendo que cosα = 0,2, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$.
47. Sabiendo que tgα = 2, α pertenece al primer cuadrante, calcula sen3α.
48. Sabiendo que tg2α = $\sqrt{3}$ y que α < $\frac{\pi}{2}$, halla el seno y coseno de α.
49. Sabiendo que α es un ángulo situado en el segundo cuadrante y que tgα = –¼ , halla las razones trigonométricas de 2α.
50. Sabiendo que tg(α/2) = 2, Halla senα y cosα.
51. Sabiendo que tg(α + β) = –3 y que tgα = 2. Halla tg2β y tg(α – β).
52. Transforma en producto: a) sen60º – sen30º, b) cos60º – cos30º.
53. Calcula reduciendo al primer cuadrante las razones trigonométricas siguientes: a) sen150; b) cos135; c) tg300; d) sec225; e) cosec120; f) cotg240; g) sen750; h) cos(8π/3).
54. Si sen 20º = 0,34, calcula las razones trigonométricas de: a) 70º, b) 10º; c) 40º; d) 160º; e) 340º; f) 250º; g) 110º.
55. Sin tablas ni calculadora, determina: a) sen105º, b) cos15º, c) tg75º.
56. Halla las razones trigonométricas de 840º.
57. Si α = 60º. Calcula: a) tg$\frac{\alpha}{2}$; b) cos^{2}α; c) cos 4α; d) cos$\frac{\alpha}{2}$; e) $\frac{\cos\alpha}{2}$; f) sen2α; g) 2senα.
58. Si sen 37º = 0,6. Calcula: a) sen53º; b) tg18,5º; c) sen74º; d) cos127º; e) tg74º.

PROBLEMAS DE TRIÁNGULOS.

59. Resuelve los triángulos rectángulos, en los que A = 90º:
a) b = 3, c = 3 b) a = 5; B = 37º c) c = 15, b = 8.

60. La base de un triángulo isósceles mide 60 cm y los lados iguales 50 cm. Calcula sus ángulos.

61. Sabiendo que en un triángulo A=90º, a=13 cm y b=12 cm. Hallar el otro lado y los otros ángulos.

62. Resuelve el triángulo, (A = 90º), sabiendo que: B = 30º y b = 4 cm. ¿Cuál es su área?

63. Resuelve el triángulo isósceles ABC, en el que el ángulo desigual es A, conociendo: a) c = 10 m y a = 12 m b) A = 120º y c = 2 m c) B = 45º y a = 10 m.

64. La base de un triángulo isósceles mide 20 m y el ángulo opuesto 74º. Calcula los lados y la superficie.

65. Indica si son posibles los triángulos de medidas:
a) a = 30; b = 20; c = 60 cm b) b = 50; c = 4 m; B = 60º
c) a = 5; b = 32; c = 4 m d) b = 60; c = 90 cm; C = 30º.

66. Calcula la superficie de un triángulo sabiendo que los lados a y b miden respectivamente 20 y 30 cm. y que el ángulo C es de 30º.

67. Resuelve los triángulos: a) a = 6; B = 45º; A = 75º; b) A = 90º; B = 30º, a = 6.

68. Resuelve los triángulos: a) a = 20 m; B = 45º; C = 65º b) c = 6 m, A = 105º, B = 35º
c) b = 40 m; c = 30 m, A = 60º.

69. En un triángulo el ángulo A mide 75º, el ángulo B 35º y el lado a 30 m.
a) Calcula el resto de los elementos del triángulo y su área.
b) Haz lo mismo para el triángulo de elementos: A = 100º, B = 30º, b = 20 m.

70. Sin calculadora, resuelve los siguientes triángulos:
a) a = 10 cm, B = 45º y C = 75º b) b = 4 m A = 15º, B = 30º

71. Dado el triángulo de vértices A, B, C, sabiendo que A = 60º, B = 45º y que b = 20 m, resuélvelo y calcula su área.

72. Resuelve el triángulo ABC, en el cual A = 30º, b = 3 m, c = 4 m. Calcula su área.

73. Resuelve, sin emplear calculadora, los triángulos en los que se conocen estos datos:
a) a = 20 m, B = 45º y C = 75º b) b = 12 cm, A = 15º y B = 30º c) A = 90º, B = 60º y a = 20 m.

74. El radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC mide $\sqrt{72}$ cm. si dos de los ángulos del triángulo son de 60º y 45º. Resuelve el triángulo y calcula su área.

75. Calcula los ángulos de un rombo de diagonal 4 y lado 4 m.

76. Calcular el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 m.

77. Calcula la longitud de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales son de 20 y 16 cm. y las diagonales forman entre sí un ángulo de 37º.

78. En una pirámide cuadrangular, el lado de la base mide 200 m. Y el ángulo α que forma una cara con la base es de 60º. Calcular: a) la altura de la pirámide; b) la altura de una cara; c) el ángulo que forma la arista con la base; d) el ángulo que forma la cara con la cúspide.

79. Calcula el área del decágono regular de 10 cm de lado.

80. En una circunferencia de 6 cm de radio trazamos una cuerda de 9 cm. ¿Qué ángulo central abarca dicha cuerda?

81. Una circunferencia tiene de radio 6 cm. ¿Cuál será la longitud de circunferencia correspondiente a un ángulo de 30º?

82. Calcular los ángulos de un rombo sabiendo que su lado mide 5 m y una diagonal 8 m.

83. Calcula el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 12 m.

84. En una circunferencia de radio 8 m se toma una cuerda de 4 m. ¿Cuál es el ángulo que abarca?

85. Calcula los ángulos de un rombo del que se conocen las diagonales: 16 m y 12 m. ¿Cuál es su área?

86. Halla los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un octógono regular de lado 6 m.

87. Calcula los ángulos de un trapecio isósceles en el que las bases miden 60 m y 30 m y de altura 30 m.

88. Calcula el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 50 cm de diámetro.

89. En una circunferencia de 10 cm de radio se traza una cuerda de 6 cm. Averigua el ángulo central que abarca dicha cuerda.

90. Calcula el radio de la circunferencia circunscrita a cada uno de los triángulos siguientes, en los que se conocen: a) b = c = 2 m y B = 30º; b) b = 6 m, A = 90º y C = 37º.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

91. Resuelve: a) sen2x = –½ ; b) cosx = 3/2 ; c) tgx =1; d) sen 3x = 3/2.

92. Resuelve: a) $\text{sen}(x - \frac{\pi}{3}) = \text{sen}(2x + \frac{\pi}{3})$ b) $\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$
c) cos2x = cosx d) sen2x = cosx.

93. Resuelve: a) log(senx) – log(cosx) = 0 b) cosx – 2senx·cosx = 0 c) $\text{sen}^2x + \cos 2x = \frac{1}{4}$
d) $\text{tg}^2x + 2 = 3\text{tg}x$ e) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 2 - \cos^2x$.

94. Resuelve: a) $\cos^2x = \text{sen}^2x$ b) senx = –cosx c) sen(2x – 15º) = cos(x + 15º).

95. Resuelve: a) tgα = 2senα b) $2\text{sen}^2x + \cos^2x - 32\text{sen}x = 0$
c) $\text{sen}^2x - \text{sen}x + \frac{1}{4} = 0$ d) $\cos^2x = \frac{\cos x}{2}$

96. Resuelve, sabiendo que x e y pertenecen al primer cuadrante:
a) cos(60 + x) = sen x b) sen2x = tgx c) $4\cos^2x - 4\cos x + 1 = 0$
d) $\begin{cases} \text{sen}x + \text{sen}y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$ e) $\begin{cases} \text{tg}x + \text{tg}y = 1 \\ \cos(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

97. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:
a) cosx + 3senx = 2 b) $4\text{sen}\frac{x}{2} + 2\cos x = 2$ c) 2sen(x + 30º)·cos(x – 30º) = 3
d) $\text{sen}\frac{x}{2} = \text{tg}\frac{x}{4}$ e) 6 tgx = 3/cosx f) log(tgx) + log(cosx) = log(½)

98. Resuelve: a) senα = sen β; b) cosα = cosβ; c) tgα = tgβ; d) senα = cosβ; e) tgα = cotgβ

99. Resuelve las ecuaciones:
a) $\text{sen}x = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ b) $\text{sen}x = -\text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ c) cos(2x) = cos(x + 90º)
d) $\text{sen}3x = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ e) senx = cos2x f) tgx = tg(2x + π)
g) $\text{sen}(2x + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ h) x = arcsen0 i) sen(3x–120º) = cos(x+15º)
j) x = arctg1 k) x = arcos(–½) l) senxcosx = ½
m) $2\cos 5x\,\text{sen}2x = \sqrt{2}\cos 5x$ n) $\cos^2x = \text{sen}^2x$ ñ) senx = –cosx
o) cosx – 2senxcosx = 0 p) cos2x = 1 + 2senx q) $\text{tg}^2x + 3 = 4\text{tg}x$
r) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$ s) $6\cos^2x + \cos 2x = 1$ t) $\text{sen}x + \frac{1}{3}\cos x = 0$
u) senxcosx = ½ v) $\cos x\,\text{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w) sen2x = senx
x) $\sqrt{3} + \cos x = 0$ y) cos2x = sen(x + 180º)

100. Resuelve los siguientes sistemas:
a) $\begin{cases} \text{sen}x + \text{sen}y = 1 \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos x \cdot \text{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}(x+y) = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \text{sen}x \cdot \text{sen}y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$
d) $\begin{cases} \text{sen}^2x + \cos^2 y = 1 \\ -\cos^2 x + \text{sen}^2y = \frac{1}{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \text{sen}x + \text{sen}y = \frac{3}{2} \\ x + y = 120^\circ \end{cases}$ f) $\begin{cases} \text{sen}x \cdot \text{sen}y = \cos x \cdot \cos y \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$

g) $\begin{cases} senx + seny = 1 \\ 2x + 2y = 120º \end{cases}$ h) $\begin{cases} \cos(x+y) = 0 \\ \cos(x-y) = 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} senx + seny = 1 \\ senx - seny = 0 \end{cases}$

101. Despeja x en las siguientes igualdades: a) 2 = 2arctg $\frac{x}{4}$; b) 1 = $\sqrt{2}$ arcos $\frac{1}{x}$

102. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen (x – 30º) = ½ b) cos (2x – 30º) = ½ c) sen (3x – 30º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) cos (3x – 15º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) tg (x – 45º) = –1 f) cos(2x) – 2cosx + 1 = 0

g) sen2xcosx = 6sen^{3}x h) cosx = $\frac{2tgx}{1+tg^2x}$ i) sen^{2}x – cos^{2}x = –½

j) cosecx.cosx=1 k) tgxsecx = 2 l) cos2x = 2cos^{2}x

m) tgx = 2senx n) 2tgx = 1/cos^{2}x ñ) sec(3x)=2/$\sqrt{3}$

o) $\frac{4tgx}{1-tg^2x} = \frac{2}{tgx}$ p) cos2x + 2cos^{2}x = 0 q) cos2x + senx = cosx

r) sen4x+sen2x = 0 s) sen(2x – $\frac{\pi}{3}$) = ½ t) 3senx = 2cos^{2}x

u) tg(2x) = –1 v) tg^{2}x = 3 w) 2sen^{2}x – 2$\sqrt{2}$senx + 1= 0

PROBLEMAS

103. Calcula la altura de una torre, si situándonos a 20 m de su pie vemos la parte más alta bajo un ángulo de 45º.

104. El ángulo de elevación de una torreta eléctrica es de 45º a una distancia de 10 m de la torreta. Si el observador se encuentra a 1 m sobre el suelo. Calcula la altura de la torreta.

105. En un solar de forma triangular dos de sus lados miden 6 y 10 m respectivamente y el ángulo comprendido se midió con un teodolito y resultó ser de 30º. ¿Cuál es su superficie?

106. Desde mi casa veo la fuente que está en el centro de la plaza mayor y también veo el ayuntamiento. He preparado un teodolito para calcular el ángulo formado por dichas visuales y ha dado 26º23'. La distancia desde mi casa a la fuente es de 40 m y la distancia de la fuente al ayuntamiento es de 30 m. ¿Qué distancia hay desde mi casa al ayuntamiento?

107. Los padres de Pedro tienen una parcela en el campo de forma triangular. Cuyos lados miden 20, 22 y 30 m. Pedro quiere calcular los ángulos. ¿Cuáles son esos ángulos?

108. Dos amigos van a subir una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación y obtuvieron que era de 30º. Han avanzado 300 m hacia la montaña y han vuelto a medir y ahora es de 45º. Calcula la altura de la montaña.

109. Dos amigos observan desde su casa un globo que está situado en la vertical de la línea que une sus casas. La distancia entre sus casas es de 3 km. Los ángulos de elevación medidos por los amigos son de 45 y 60º. Halla la altura del globo y la distancia de ellos al globo.

110. Tres pueblos están unidos por carreteras: AB = 10 km, BC = 12 km y el ángulo formado por AB y BC es de 120º. Cuánto distan A y C.

111. Van a construir un túnel del punto A al punto B. Se toma como referencia una antena de telefonía (C) visible desde ambos puntos. Se mide entonces la distancia AC = 250 m. Sabiendo que el ángulo en A es de 53º y el ángulo B es de 45º calcula cuál será la longitud del túnel.

112. Dos amigos andan a 4 km/h. Llegan a un punto del que parten dos caminos que forman entre sí un ángulo de 60º y cada una toma un camino. ¿A qué distancia se encontrarán al cabo de una hora?

113. Un avión vuela entre A y B que distan 7 km. Las visuales desde el avión de A y B forman un ángulo de 45 y 37º con la horizontal. a) ¿A qué altura está el avión?; b) Si una persona se encuentra en la vertical bajo el avión, ¿a qué distancia se encuentra de cada ciudad?

114. Estando situado a 100 m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de 30º. Mi amigo ve el mismo árbol bajo un ángulo de 60º. ¿A qué distancia está mi amigo del árbol?

115. Para medir la altura de una montaña hallamos el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo 53º. Nos alejamos 175 m y ahora el nuevo ángulo es de 37º. ¿Cuanto mide la altura de la montaña?

116. Si vemos una chimenea bajo un ángulo de 60º, ¿bajo qué ángulo la veríamos si la distancia fuese el doble? ¿Y si fuese el triple?

117. Andrés mide 180 cm y su sombra 135 cm. ¿Qué ángulo forman en ese instante los rayos de sol con la horizontal?

118. Calcular la anchura de un río si nos colocamos enfrente de un árbol de la otra orilla y luego al desplazarnos 100 m paralelamente al río observamos el mismo árbol bajo un ángulo de 20º.

119. Calcula la altura de una casa sabiendo que cuando la altura del sol es de 56º proyecta una sombra de 20 m.

120. Un avión que está volando a 500 m de altura distingue un castillo con un ángulo de depresión de 15º ¿A qué distancia del castillo se halla?.

121. Desde dos puntos A y B separados entre si 60 m, se dirigen dos visuales a un árbol situado en la recta AB en un punto entre A y B. El observador de A lo ve bajo un ángulo de 50º y el de B bajo un ángulo de 40º. Calcular: a) la altura del árbol y la distancia de A al pie de la vertical en la que se encuentra el árbol.

122. Un teleférico recorre 200 m con un ángulo de elevación constante de 25º. ¿Cuántos metros ha avanzado en la horizontal, y cuántos metros ha ganado de altura?

123. El viento tronza un árbol, la punta se apoya en el suelo, en un punto situado a 10 m del pie, formando un ángulo de 30º con el plano horizontal. ¿Cuál era la altura del árbol?

124. Una persona mide 1,80 m y proyecta una sombra de 1,90 m. Halla las razones trigonométricas del ángulo que forman los rayos del sol con la horizontal.

125. Dos móviles parten de un punto al mismo tiempo, siguiendo dos trayectorias rectilíneas que forman entre sí un ángulo de 135º y con velocidades de 10 y 20 m/s respectivamente. Al cabo de cinco minutos ¿qué distancia los separa?

126. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto P de la orilla opuesta, las visuales forman con la dirección de la orilla ángulos de 45º y 60º respectivamente. Calcula la anchura del río sabiendo que la distancia entre A y B es de 12,62 m.

127. Un repetidor de televisión, situado sobre una montaña, se ve desde un punto del suelo P bajo un ángulo de 67º; Si nos acercamos a la montaña 30 m lo vemos bajo un ángulo de 70º y desde ese mismo punto vemos la montaña bajo un ángulo de 66º. Calcular la altura del repetidor.

128. Desde una altura de 3000 m un piloto observa la luz de un aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30º. Determina la distancia horizontal entre el avión y el aeropuerto.

129. Un avión vuela durante dos horas a 200 km/h en dirección NO. Calcula la distancia que recorre hacia el Norte y hacia el Oeste.

130. Calcula la altura de una torre sabiendo que a cierta distancia de su pie vemos el punto más alto bajo un ángulo de 60º, y si nos alejamos 20 m de dicho punto vemos el punto más alto bajo un ángulo de 30º. ¿A qué distancia nos encontramos inicialmente del pie de la torre?

131. Un avión vuela horizontalmente a una determinada altura "h". Cuando se encuentra sobre la vertical de un punto A, ve la torre del aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30º. Al aproximarse 1000 m ve la misma luz bajo un ángulo de 60º. Halla: a) La altura a la que vuela el avión; b) La distancia del punto A a la torre del aeropuerto.

132. Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de 60º. Calcula la altura de la torre.

DEMOSTRACIÓN DE IGUALDADES

133. Demuestra que son ciertas las expresiones:

a) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \text{sen}(2\alpha)$

b) $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha$

c) $\cos^2\alpha = \dfrac{\text{cotg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}$

d) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$

e) $\text{tg}(45^\circ + a) - \text{tg}(45^\circ - a) = 2\text{tg}2a$

f) $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

g) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

h) $(1 + \cos 2x)\cdot\text{tg}x = 2\text{sen}(2x)$

i) $\dfrac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \text{sen}^2 x$

j) $\dfrac{1}{1+\text{tg}^2 x} = \cos^2 x$

k) $\dfrac{\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-\cos x}{2}$

l) $\dfrac{\text{sen}x - \text{cosec}x}{\cos x - \sec x} = \text{cotg}^3 x$

m) $\dfrac{\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)}{\cos x - \text{sen}y} = \cos x + \text{sen}y$

n) $\text{sen}\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\text{sen}x}{2}$

ñ) $\text{sen}(90^\circ + \alpha)\cdot\cos(-\alpha) + \text{sen}(180^\circ + \alpha)\cdot\cos(90^\circ + \alpha) = 1$

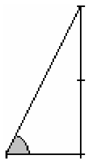
o) $\cos(-\alpha)\cdot\cos(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha)\cdot\text{sen}(-\alpha) = -1$

p) $\text{sen}(\pi - \alpha)\cdot\text{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \text{sen}(-\alpha)\cdot\cos(\pi + \alpha) = \text{sen}2\alpha$

SOLUCIONES

1. NO, SI.
2. a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\text{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$

   b) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$



3.
4. a) cosx = ½; tgx = $\sqrt{3}$

   b) senx = 0,6; tgx = 3/4;

   c) senx = $\frac{2}{\sqrt{5}}$; cosx = $\frac{1}{\sqrt{5}}$
5. 1110º ~ 30º;

   sen1110 = ½, cos1110 = 3/2,

   tg1110 = 1/3, cotg1110 = $\sqrt{3}$,

   sec1110 = $\frac{2}{\sqrt{3}}$, cosec1110 = 2.
6. a) 210º; cosα = –3/2, tgα = $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

   b) 225º; senα = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ = cosα
7. senx = –0,8; tgx = –4/3, secx = 5/3; cosecx = –5/4; cotgx = –3/4.
8. 135º y 315º
9. a) 180º, 200º, π rad;

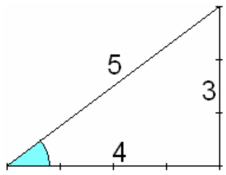
   b) 90º, 100º, π/2 rad;

   c) 60º, 200/3º, π/3 rad
10. a) 45º; b) 135º; c) 225º; d) 240º.
11. π/6, π/4, 5π/4, 7π/6, 3π/2, 60º, 180º, 135º, 225º, 90º
12. a) senα = –4/5; tgα = –4/3;

    b) senα = $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, tgα = –2$\sqrt{2}$;

    c) senα = $\frac{2}{\sqrt{29}}$, cosα = $-\frac{5}{\sqrt{29}}$;

    d) senα = $-\frac{\sqrt{5}}{3}$, cosα = –2/3
13. a) no; b) no
14. cotg(+), cosec(-), sec(-)
15. En el 2º (-); en el 3º(+).
16. senα = $-\frac{4}{\sqrt{17}}$; cosα = $-\frac{1}{\sqrt{17}}$
17. x = 37º; y = 50º; z = 70º; α = 25º.
18. cos α = –0,6; tgα = –4/3
19. cosα = $-\frac{2}{\sqrt{5}}$; senα = $-\frac{1}{\sqrt{5}}$
20. senα = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; cosα = –½; tgα = $-\sqrt{3}$
21. senα = $-\frac{3}{\sqrt{13}}$, cosα = $-\frac{2}{\sqrt{13}}$



22.
23. sen120º = sen60º, cos120º = –cos60º;

    sen135º = sen45º, cos135º = –cos45º;

    sen150º = sen30º, cos150º = –cos30º;

    sen180º = sen0º, cos180º = –cos0º;

    sen210º = –sen30º, cos210º = –cos30º;

    sen225º = –sen45º, cos225º = –cos45º;

    sen240º = –sen60º, cos240º = –cos60º;

    sen270º = –sen90º, cos270º = –cos90º;

    sen300º = –sen60º, cos300º = cos60º;

    sen315º = –sen45º, cos315º = cos45º;

    sen330º = –sen30º, cos330º = cos30º
24. sen(45º–30º), cos(45º–30º), tg(45º–30º)
25. a) β =180º – α;

    b) β = 180º – α ó β = 180º + α;

    c) β = 90º + α ó 270º – α;

    d) β = 180º + α
26. a) 765º~45º, sen765º = cos765º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

    b) –240º~120º,

    sen(-240º)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$, cos(-240º) = – ½
27. sen53º = 0,8; cos53º = 0,6; tg53º = 4/3
28. sen143º=0,6; cos143º=–0,8; tg143º=–3/4
29. 0,643
30. sen150º=½, cos150º=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg150º=$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
31. sen70º=0,94; cos70º=0,342; tg70º=2,75
32. sen143º=0,6; cos143º=–0,8; tg143º=–¾
33. a) sen49º=0,74; cos49º=0,656; tg49º=1,15;

    b) sen25º=0,42; cos25º=0,9; tg25º=0,47
34. sen215º=–0'57; cos215º=–0,82; tg215º=0,7
35. sen150º=½, cos150º=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

    sen(–225º)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$, cos(-225º)=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\text{sen}480° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cos480º=–½;

$\text{sen}(-660°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cos(-660º)= ½;

sen(-1770º)= ½, $\cos(-1770°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

sen1440º = 0, cos1440º = 1

36. sen(π-α)=4/5; sen(π+α)=-3/5; sen(-α)=3/5
37. 64º20'42''; $\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2(90 - \alpha) = 1$
38. 44º21'44'', senα = sen(180 – α)
39. sen(2α) = 24/25, cos(2α) = –7/25; $\text{sen}(\alpha/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos(\alpha/2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$
40. $\text{sen}(-1200°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, cos(-1200º) = – ½;

    sen(570º) = – ½, $\cos(570°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

    $\text{sen}(10\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, cos(10π/3) = – ½
41. $\text{sen}75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

    $\text{sen}3000 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cos3000º = – ½
42. sen3625º = cos4025º;
    cos3625º = sen4025º
43. tg(α + 45º) = 3; tg(45º – α)= 1/3
44. sen9º = 0,156, cos9º = 0,988;
    sen6º = 0,105, cos6º = 0,995
45. sen40º = 0,643, cos40º = 0,766
46. $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = -0{,}92$; $\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = 0{,}392$
47. $\text{sen}(3\alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$
48. senα = ½ , $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
49. sen(2α) = –8/17; cos(2α) = 15/17
50. senα = 4/5; cosα = –3/5
51. No existe tg2β; tg(α – β) = 1/3
52. a) 2·sen15·cos45; b) –2·sen45·sen15
53. a) 1/2; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $-\sqrt{3}$; d) $-\sqrt{2}$;

    e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; g) 1/2; h) –1/2.
54. a) sen70º = 0,94, cos70º = 0,34, tg70º = 2,76;
    b) sen10º = 0,17, cos10º = 0,98, tg10º = 0,18;
    c) sen40º = 0,64, cos40º = 0,77, tg40º = 0,83;
    d) sen160º = 0,34, cos160º = –0,94, tg160º = –0,36;
    e) sen340º = –0,34, cos340º = –0,94, tg340º = 0,36;
    f) sen250º = –0,94, cos250º = –0,34, tg250º = 2,76;
    g) sen110º = 0,94, cos110º = –0,34, tg110º = –2,76.
55. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; c) 2 + $\sqrt{3}$
56. $\text{sen}840° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cos840º=–½; tg840º=$-\sqrt{3}$
57. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) ¼; c) –½; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

    e) ¼; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; g) $\sqrt{3}$
58. a) 0,8; b) 1/3, c) 0,96; d) –0,6; e) 24/7.
59. a) B = 45º, C = 45º, b = 3$\sqrt{2}$;
    b) C = 53º, b = 3, c = 4;
    c) a = 17, C = 61,9º, B = 28,1º
60. 53º, 53º, 74º.
61. c = 5, B = 67,4º, C = 22,6º
62. C=60º; b=4$\sqrt{3}$ cm; a=8cm; S=8$\sqrt{3}$ cm^2.
63. a) C = B = 53º; A = 74º; b = c = 10;
    b) B = C = 30º; b = c = 2, a = 2$\sqrt{3}$;
    c) B = C = 45º, A = 90º, b = c = 5$\sqrt{2}$
64. x = 50/3; S = 400/3 m^2.
65. a) No; b) No; c) No; d) Sí
66. 150 cm^2.
67. a) b = 4,4; c = 5,4; C = 60º;
    b) C = 60º, b = 3, c = 3$\sqrt{3}$
68. a) A = 70º, b = 15, c = 19,3;
    b) C = 40º, a = 9, b = 5,35;
    c) a = 36, B = 71º, C = 46º
69. a) C = 70º, b = 17,8, c = 29,2; Area = 250,9 m^2
    b) C = 50º, a = 39,4, c = 30,64; Area = 301,75 m^2
70. a) A=60º, b = $10\frac{\sqrt{6}}{3}$; c = $5\frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

    b) c = 4$\sqrt{2}$, C=135º, a = $2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$
71. C=75º; a=24,5m; c=27,3m; S=236,4 m^2
72. B=46,9º; C=103,1º; a=2,05; S=3 m^2.
73. a) A=60º, b=$20\frac{\sqrt{6}}{3}$, c=$\frac{10\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{3}$

    b) C=135º, a=$6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, c=12$\sqrt{2}$;

    c) C=30º, a=10$\sqrt{3}$, c=10
74. a=6$\sqrt{6}$ cm; b = 12 cm; c = 6(1 + $\sqrt{3}$)cm

    A=60º, B=45º, C=75º; S = 9(3 + 2$\sqrt{3}$)cm^2
75. 60º y 120º.
76. 7 m.

77. 6 y 17,1 cm.
78. a) 1003; b) 200; c) 50,77º; d) 30º
79. 293,88 u^2.
80. 97,2º.
81. 3,14 cm.
82. 74º, 106º
83. S = 342,4 m^2.
84. α = 28,95º.
85. α=73º44'23''; β=106º15'37''; S=96 m^2.
86. R = 7,84 m; r = 7,24 m.
87. A = B = 63,4º; C = D = 116,6º.
88. 29,4 cm
89. 34,9º
90. a) 2; b) 10
91. a) x = 105º + k·180º; 165º + k·180º;
b) x = 30º + k·360º; 330º + k·360º;
c) x = 45º + k·180º;
d) x = 20º + k·120º; 40º + k·120º.
92. a) x = 60º + k·120º, x = 240º + k·360º;
b) x = π/2 + 2kπ, x = 11π/6 + 2kπ/3;
c) x = k·120º; d) x = 30º + k·120º.
93. a) x = 45º + k·360º;
b) 90º+k·360º, 30º+k·360º, 150º+k·360º;
c) x = 60º + k·180º, x = 120º + k·180º;
d) x = 45º + k·180º, 63,43º + k·180º;
e) x = k·180º.
94. a) 45º + k·90º; b) 135º + k·180º;
c) 30º + k·120º, 330º + k·360º
95. a) 60º + k·360º, 300º + k·360º, k·360º;
b) 45º + k·360º, 135º + k·360º;
c) 30º + k·360º, 150º + k·360º;
d) 90º+k·180º, 60º+k·360º, 300º+k·360º
96. a) x = 15º; b) x = 0º, x = 45º; c) x = 60º;
d) x = 0º, y = 90º; x = 90º, y = 0º;
e) x = 45º, y = 0º; x = 0º, y=45º
97. a) x = 60º + k·360º;
b) x = 180º + k·360º;
c) x = 60º + k·180º, x = 30º + k·180º;
d) x = k·180º;
e) x = 30º + k·360º, x=150º + k·360º
f) x = 30º + k·360º;
98. a) α = β, α = 180º – β;
b) α = β, α = –β;
c) α = β, α = 180º + β;
d) α = 90º – β, α = β – 90º;
e) α = 90º – β
99. a) π/4 + kπ; b) -π/4 + kπ;
c) π/6 + 2kπ/3, π/2 + 2kπ;
d) π/30 + 2kπ/5; e) π/6 + 2kπ/3;
f) kπ g) π/12 + 2kπ; 7π/36 + 2kπ/3
h) kπ i) 5π/8 + kπ; 13π/48
j) π/4 + kπ
k) 2π/3 + 2kπ; 4π/3 + 2kπ
l) π/4 + kπ
m) π/10 + kπ/5: π/8 + kπ; 3π/8 + kπ
n) x = π/4 + kπ/2;
ñ) 3π/4 + kπ
o) x = π/2 + kπ; π/6 + 2kπ; 5π/6 + 2kπ
p) x = kπ, x = 3π/2 +2kπ
q) x = π/4 + kπ; x ≅ 1,25 + kπ;
r) x = cualquiera
s) x = π/3 + kπ; x = 2π/3 + kπ
t) x ≅ 2,82 + kπ
u) x = π/4 + kπ
v) x = π/3 + kπ; x = 2π/3 + kπ
w) x = kπ; x = π/3 + 2kπ: x = 2π/3 + 2kπ
x) No tiene solución
y) x=π/2+2kπ; x=7π/6+2kπ; x=11π/6+2kπ
100. a) x = 30º, y = 30º; x = 150º, y = 150º
b) x = 60º, y = 30º; x = 120º, y = 330º;
c) x = 30º, y = 30º; x = 150º, y = 150º;
d) x = 60º, y = 60º; x = 120º, y =120º; x = 240º, y = 240º; x = 300º, y = 300º, x = 60º, y = 120º...;
e) x = 90º, y = 30º; x = 30º, y = 90º;
f) x = 60º, y = 30º
g) x = 30º, y = 30º
h) x = 90º, y = 0º; x = 270º, y = 0º.
i) x = 30º + k360º = y; x = 150º + k360º = y
101. a) x = π; x = 5π;
b) x = 4/π; x = 4/(7π)
102. a) x = 60º + k360º; x = 180º + k360º;
b) x = 45º + k180º; x = 165º + k180º;
c) x = 30º + k120º; x = 50º + k120º;
d) x = 15º + k120º; x = 115º + k120º;
e) x = k180º.
f) x = π/2 + 2kπ; x = 2kπ.
g) x=k180º; x=30º+k180º; x=150º+k180º;
h) x = 30º + k360º; x = 150º + k360º;
i) x = 30º + k180º; x = 150º + k180º;
j) x = 45º + k180º;
k) x = 60º + k360º; x = 300º + k360º;
l) x = 60º + k180º; x = 120º + k180º
m) x=k180º, x=60º+k360º, x=300º + k360º;
n) x = 45º + k180º, x = 135º + k180º;
ñ) x = 10º + k120º; x = 100º + k120º.
o) x = 30º + k180º;
p) x = 60º + k360º; x = 120º + k360º;
q) x = 30º + k360º; x = 150º + k360º.
r) x = k60º; x = 90º + k180º
s) x = π/4 + kπ, x = 7π/12 + kπ;
t) x = π/6 + 2kπ; u) x = 11π/6 + 2kπ;
v) x = π/3 + kπ; x = 2π/3 + kπ
w) x = π/4 + 2kπ; x = 3π/4 + 2kπ
103. 20 m

104. 11 m.

105. 15 m^2

106. 60 m; 11,67 m

107. 41,8º, 47,16º y 91,04º.

108. 410 m.

109. 1900 m de altura, 2690 m de uno y 2198 m del otro.

110. 19 km.

111. 350 m.

112. 4 km.

113. a) 3 km; b) 3 km de A; 4 km de B.

114. 100/3 m.

115. 300 m.

116. 40,9º, 30º.

117. 53º.

118. 36,4 m.

119. 30 m.

120. 1932 m.

121. h = 29,5 m; d = 24,8 m y 30,5 m.

122. d = 181 m; h = 84,5 m.

123. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m.

124. sen43,45º = 0,688; cos43,45º = 0,726; tg43,45º = 18/19.

125. 8394 m

126. 8 m

127. 90,5 m.

128. $3000\sqrt{3}$ m.

129. x = y = $200\sqrt{2}$ km.

130. h = $10\sqrt{3}$ m; x=10 m

131. a) h = $500\sqrt{3}$ m; b) x = 1500 m.

132. h = $25\sqrt{3}$ m.

1. De la recta *r* se sabe que pasa por el punto A(2, 1) y un vector director es u(–2, 4). Determina su ecuación en todas las formas que conozcas.

2. La ecuación implícita de una recta es 2x – 3y + 1 = 0. Escribe la ecuación de esta recta en forma continua, explícita, vectorial y paramétrica razonando las respuestas.

3. Determina el área del paralelogramo ABCD, sabiendo que la ecuación de la recta que contiene al lado AB es x – 2y = 0, la ecuación del lado AD es 3x + y = 0 y las coordenadas del punto C son (3, 5). Razona la respuesta.

4. Dados los puntos A(1, –2) y B(3, 0), halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB. Halla, también, el ángulo que forma esta mediatriz con el eje de abscisas.

5. La recta 4x – 3y = 12 es la mediatriz del segmento AB. Halla las coordenadas del punto B, sabiendo que las del punto A son (1, 0).

6. Los puntos B(–1, 3) y C (3, –3) son los vértices de un triángulo isósceles que tiene el tercer vértice A en la recta x + 2y = 15, siendo AB y AC los lados iguales. Calcula las coordenadas de A y las ecuaciones y las longitudes de las tres alturas del triángulo.

7. Por el punto A(2, 6) se trazan dos rectas perpendiculares a las bisectrices del primer cuadrante y del segundo cuadrante. Halla las ecuaciones de dichas rectas y las coordenadas de los vértices del triángulo formado por esas dos rectas y la recta de ecuación 3x – 13y = 8.

8. Halla las ecuaciones de todas las rectas que pasen por el punto P(2, –3) y formen un ángulo de 45º con la recta 3x – 4y + 7 = 0.

9. Determina el valor de *a* para que las rectas *a*x + (*a* – 1)y – 2(*a* + 2) = 0 y 3*a*x – (3*a* + 1)y – (5*a* + 4) = 0 sean: a) paralelas; b) perpendiculares

10. Determina el valor de m para que las rectas mx + y = 12 y 4x – 3y = m + 1 sean paralelas. Después halla su distancia.

11. Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forma la recta 5x + 12y – 60 = 0 con el eje de ordenadas.

12. Dados los puntos A (4, –2) y B(10, 0), halla el punto de la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes que equidista de ambos puntos.

13. Dados los puntos A(2, 1), B(–3, 5) y C(4, m), calcula el valor de m para que el triángulo ABC tenga de área 6.

14. Halla las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto A(1, –2) distan 2 unidades del punto B(3, 1).

15. Un rayo de luz r pasa por el punto de coordenadas (1, 2) e incide sobre el eje de abscisas formando con éste un ángulo de 135º. Suponiendo que sobre el eje de abscisas se encuentra un espejo, halla la ecuación del rayo r y del rayo reflejado en el espejo.

16. Determina las coordenadas del circuncentro del triángulo ABC, sabiendo que A = (2, –7), B = (5, 9) y C = (–2, –7). Halla también la ecuación de la circunferencia circunscrita y comprueba que dicha circunferencia pasa por los puntos A, B y C.

17. Dados los puntos A(0, –1) y B(1,2), halla las coordenadas de todos los puntos P situados sobre la recta x + y = 2 tales que las rectas PA y PB sean perpendiculares.

18. Los puntos A(3, –2) y C(7, 4) son vértices opuestos de un rectángulo ABCD, el cual tiene un lado paralelo a la recta 6x – y + 2 = 0. Halla las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo y las ecuaciones de sus lados.

19. Halla las coordenadas del simétrico del punto P(0, 6) respecto de la recta y = 2x – 3.

20. Los puntos A(2, –1) y C(3, 6) son vértices opuestos de un rectángulo ABCD. Sabiendo que B está en la recta de ecuación x + 4y = 0, halla las coordenadas de los vértices B y D.

21. Averigua si el triángulo de vértices A(2, 2), B(4, 7), C(9, 4) es isósceles.

22. En los tres triángulos siguientes averigua si son acutángulos, rectángulos u obtusángulos por dos procedimientos distintos: mediante las longitudes de los lados y mediante los productos escalares de los vectores que forman los lados:

a) A(2, 0), B(1, 5), C(3, 3); b) A(2, 0), B(6, $2\sqrt{3}$), C ($2+\sqrt{3}$, –2); c) A(3, –1), B(3, 3), C(0, 6)

23. De un rombo ABCD se conocen A(1, 3), B(4, 6), C(4, y). Halla la longitud de sus diagonales y la medida de los ángulos del rombo.

24. Calcula la distancia de los puntos A(–2, 5), B(1, 2) y C(1/3, –5/2) a la recta de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$

25. Halla los puntos de la recta 7x – y – 28 = 0 que distan 5 unidades de la recta 3x–4y–12 = 0.

26. Un cuadrado tiene un vértice en el punto (0, 7) y una de sus diagonales sobre la recta de ecuación 3x – 2y – 6 = 0. Halla el área.

27. Un cuadrado tiene un vértice en el origen y un lado sobre la recta x – 2y + 10 = 0. Halla el área del cuadrado y la longitud de la diagonal.

28. Un vértice de un triángulo equilátero es el punto (0, 0); una de sus medianas está sobre la recta y = 2x + 5. Halla el área del triángulo y las coordenadas de los otros dos vértices.

29. Halla la ecuación de una recta que forma un ángulo de 120º con el semieje de abscisas positivo y que dista 2 unidades del origen.

30. Halla las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta 3x + 4y + 2 = 0 que distan 1 unidad de ella.

31. Halla las coordenadas de un punto P situado sobre la recta x + y – 15 = 0 que equidiste de las rectas y – 2 = 0, 3y = 4x – 6.

32. Las rectas de ecuaciones 3x + 4y – 5 = 0 y px + 7y + 2 = 0 forman un ángulo cuyo seno vale 3/5. Halla p.

33. Averigua cuáles de las siguientes parejas de rectas pueden contener dos medianas de un triángulo equilátero: a) $(2+\sqrt{3})x + y - 1 = 0$; x – y – 3 = 0 b) x + 2y – 1 = 0; 2x – y + 4 = 0

34. Dos medianas de un triángulo equilátero se hallan sobre las rectas y = mx e y = 2x – 5. Calcula m y la ecuación de la otra mediana.

35. Se considera un trapecio rectángulo ABCD cuyo lado oblicuo es CD. Se conocen los vértices A = (1, 2), B = (–1, 7) y la ecuación de la recta CD es x + y – 1 = 0. Calcula los vértices C y D y el área del trapecio.

36. Determina las longitudes de los lados y los ángulos del triángulo cuyos lados se encuentran sobre las rectas 2x + y = 2, 5x + 2y = 10 y el eje de ordenadas.

37. Un hexágono regular tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de sus lados sobre la recta de ecuación $\sqrt{2}x + y - 3 = 0$. Halla su área.

38. Un hexágono regular tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de sus vértices es (6, 0). Halla las coordenadas de los demás vértices y las ecuaciones de sus lados.

39. Halla el área y los ángulos del cuadrilátero de vértices A(0, 3), B(3, 8), C(8, 6), D(8, 2).

40. Las rectas mx + y = 0 y $\sqrt{3}x - y = 1$ son medianas de un triángulo equilátero de lado 2. Halla las coordenadas de sus vértices.

1. Continua: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{4}$
   Implícita: $2x + y - 5 = 0$
   Explícita: $y = -2x + 5$
   Paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$
2. Continua: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2}$
   Explícita: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
   Vectorial: $(x, y) = (1, 1) + t(3, 2)$
   Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$
3. Área = 4 u^2
4. $y = x - 3$; 45º
5. (89/25, –73/25)
6. h_A: $2x - 3y - 2 = 0$; [26/$\sqrt{13}$]
   h_B: $4x + 7y - 17 = 0$; [52/$\sqrt{65}$]
   h_C: $8x + y - 21 = 0$; [52/$\sqrt{65}$]
7. $y = x + 4$; $y = -x + 8$;
   A(2, 6); B(7, 1); C(–6, –2)
8. $y = 7x - 17$
9. a) a = 0 b) a = ½
10. m = –4/3; d = 107/15
11. $18x + 12y - 60 = 0$; $8x - 12y + 60 = 0$
12. (10, –10)
13. m = –3; m = 9/5
14. $5x - 12y - 7 = 0$; $x = 1$
15. $x + y - 3 = 0$; $x - y - 3 = 0$
16. (5/3, –5/3); $x^2 + y^2 - 2x + 14y - 252 = 0$
17. (0, 0); (–17/37, –28/37)
18. r_{CD}: $6x - y - 38 = 0$; r_{AB}: $6x - y - 20 = 0$
    r_{AD}: $x + 6y + 9 = 0$; r_{BC}: $x + 6y - 31 = 0$
    B(151/37, 166/37); D(219/37, –92/37)
19. P'(36/5, –72/5)
20. $B_1(0, 0)$; $D_1(5, 5)$
    $B_2(\frac{60}{17}, -\frac{15}{17})$; $D_2(\frac{25}{17}, \frac{100}{17})$
21. Es escaleno
22. a) Obtusángulo en C
    b) Rectángulo en A
    c) Obtusángulo en B
23. $d_1 = \sqrt{21 - 6\sqrt{3}} \cong 3{,}26$
    $d_2 = \sqrt{21 + 6\sqrt{3}} \cong 5{,}60$
    $\alpha = 45º$ $\beta = 135º$
24. d(A, r) = 4,2; d(B, r) = 0; d(C, r) = 3,2
25. (69/25, –217/25); (19/25, –567/25)
26. Área = 800/13 u^2
27. Área = 20 u^2; d = $2\sqrt{10}$
28. Área = $10\sqrt{3}$ u^2; B(–4, 2);
    $C_1(-2+\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3})$; $C_2(-2-\sqrt{3}, 1-2\sqrt{3})$
29. $y = \sqrt{3}x \pm 4$
30. $3x + 4y + 7 = 0$; $3x + 4y - 3 = 0$
31. (–7/6, 37/6); (58/11, 107/11)
32. p = 0; p = 24
33. a) [b) son perpendiculares]
34. m = $(5\sqrt{3} - 8)/11$
35. $C(-\frac{32}{7}, \frac{39}{7})$; $D(-\frac{3}{7}, \frac{10}{7})$; Área = $\frac{29}{2}$ u^2
36. $L_1 = 3$; $L_2 = 2\sqrt{29}$; $L_3 = \sqrt{101}$
    $\alpha \cong 16º$; $\beta \cong 67º$; $\gamma \cong 97º$
37. $6\sqrt{3}$ u^2
38. A(6, 0) $B(3, 3\sqrt{3})$ $C(-3, 3\sqrt{3})$
    D(–6, 0) $E(-3, -3\sqrt{3})$ $F(3, -3\sqrt{3})$
    $3x + \sqrt{3}y - 18 = 0$; $y = 3\sqrt{3}$
    $3x - \sqrt{3}y + 18 = 0$; $3x + \sqrt{3}y + 18 = 0$
    $y = -3\sqrt{3}$; $3x - \sqrt{3}y - 18 = 0$
39. 31,5 u^2
40. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
    $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

1. Hallar la ecuación de una circunferencia de radio $r = 2$ y centro el punto $P(-1, 4)$.
2. Una circunferencia tiene su centro en el punto $M(-2, -3)$. Determinar su ecuación sabiendo que pasa por $O(0, 0)$.
3. Hallar la ecuación de una circunferencia que pasa por el punto $B(2, -1)$, y tiene su centro en el punto $N(0, 4)$.
4. Averiguar cuales de las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias:
   a) $x^2 + y^2 + 6y = 0$ b) $x^2 + 2y^2 - 3x + 5y + 2 = 0$ c) $2x^2 + 2y^2 + 6x - 10y + 2 = 0$
   d) $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$ e) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 21 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3xy + 2 = 0$
5. Indica el centro y el radio de las circunferencias:
   C_1: $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ C_2: $x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$ C_3: $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 8 = 0$
6. ¿Qué condición debe cumplir la ecuación de una circunferencia para que su centro esté situado sobre la recta $y = x$?
7. Halla la ecuación de la circunferencia tangente a $y = x + 4$ en el punto $A(1, 5)$ y que pasa por el punto $B(3, 4)$.
8. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(3, 2)$ y es tangente a la recta $3x+4y+2 = 0$.
9. Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $x + y - 2 = 0$ y pasa por los puntos $A(4, -1)$ y $B(-1,-2)$.
10. Halla la ecuación de una circunferencia de radio 5, que pasa por $P(3, 5)$ y tal que su centro está en $3x - y + 1 = 0$.
11. Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro está situado en la recta $y = 2x$, es tangente al eje OY, y es tangente también a la recta $y = x - 3$. Halla la potencia del origen de coordenadas respecto de esa circunferencia.
12. Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ y $C(0, 4)$.
13. Halla, sobre $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 10 = 0$, el punto más próximo y el más lejano a $P(6, 8)$.
14. Escribe la inecuación del círculo de centro $C(-3, 1)$ y radio 3.
15. Prueba que la recta $y = -x/2$ intercepta a la circunferencia $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$ en los extremos de un diámetro.
16. Halla la ecuación de las rectas tangentes a $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ en $A(1, -1)$. Determina también la ecuación de la otra recta tangente paralela a la anterior y el punto de contacto.
17. Prueba que las ecuaciones de las circunferencias que pasan por $A(0, 1)$ y $B(0, -1)$ son de la forma $x^2 + y^2 - 2ax - 1 = 0$, donde para cada valor de a se obtiene una de ellas.
18. Halla la longitud de la cuerda común a $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$ y $x^2 + y^2 - 12x - 10y - 4 = 0$.
19. Halla las ecuaciones de las dos tangentes que pueden trazarse a $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ desde el punto $A(0, 2)$.
20. Calcula la distancia mínima de la recta $x + y = 10$ a la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 1$.
21. Halla la ecuación de la recta tangente a $x^2 + y^2 + 5x - 3y + 3 = 0$ que pase por $P(1, 3)$.
22. Halla el eje radical de las circunferencias de centros $C_1(0, 1)$ y $C_2(1, -1)$ y radios $r_1=2$ y $r_2=3$.
23. Sea P un punto del plano que dista 12 m del centro de la circunferencia de radio 6 m. Por P trazamos una secante que determina con la circunferencia una cuerda de longitud 3 m. Calcular la longitud de la secante.
24. Sea P un punto del plano que dista 15 m del centro de una circunferencia de radio 9 m. Por P trazamos una secante a la circunferencia que corta a ésta en los puntos A y B. Calcula AB, sabiendo que PB mide 16 m.
25. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $(-1, 0)$ es doble que a $(1, 0)$.
26. Si $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 3x - 8y - 10 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 16 = 0$ son dos circunferencias, encontrar las coordenadas de un punto que, teniendo igual potencia respecto de las dos, equidiste de los ejes de coordenadas.
27. Halla el centro radical de las circunferencias $C_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$; $C_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x = 0$; $C_3 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$.

28. Halla el eje radical de las circunferencias de centro $C_1(1, 4)$ y radio 2, y $C_2(4, 1)$ y radio 3. Calcular también el área del cuadrilátero $C_1P_1C_2P_2$, donde P_1 y P_2 son los puntos de intersección del eje radical con las dos circunferencias.

29. Un foco puntual situado en P(–2, 0) proyecta luz en todas direcciones. Los rayos son interceptados por una circunferencia opaca centrada en C(3, 2) y tangente al eje de abscisas. Comprueba si un objeto situado en el punto Q(42, 44) estará o no iluminado.

30. Dos emisoras diferentes, la primera con una potencia doble que la otra, están separadas por una distancia de 4 Km. Es sabido que la intensidad con que recibe un receptor las señales emitidas es proporcional a la potencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia emisora-receptor. Determina los puntos del plano en los que la calidad de recepción de las dos emisoras es la misma. Nota: (Sitúa las emisoras sobre el eje OX y la primera de ellas en el origen de coordenadas).

31. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P(0, 0) y Q(2, 0) y es tangente a $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$.

32. Los extremos de un segmento son M(6, 2) y N(14, 8). Halla, sobre la recta r: $y - x = 0$, un punto P desde el que se vea el segmento MN bajo un ángulo de 90º.

33. Comprueba que las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 24 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ son ortogonales.

34. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve el segmento determinado por los puntos A(2, –1) y B(3, 4) bajo un ángulo de 60º. ¿Cómo se llama este lugar?

35. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a la recta $y = 3$ coincide con la suma de sus coordenadas.

36. Dos altavoces que emiten una misma melodía, están situados en A(–4, 2) y B(1, 3). Debido a la velocidad de propagación del sonido (340 m/s en el aire), las notas se reciben con mayor o menor desfase dependiendo de la posición del oyente. Halla el conjunto de puntos donde la sincronía es perfecta.

37. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A(1, 3) y B(–3, 5). ¿Cómo se llama este lugar?

38. Un segmento de 10 cm de longitud forma con los semiejes positivos un triángulo de 24 cm^2 de área. Halla las ecuaciones de las circunferencias cuyo diámetro sea dicho segmento.

39. Halla la longitud del segmento de tangente común interior a dos circunferencias de radios 2 cm y 5 cm, respectivamente, sabiendo que la distancia entre los centros es de 10 cm.

40. Halla la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{5}$, con centro en la bisectriz del tercer cuadrante y que pasa por el punto P(0, –3).

1. $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$
3. $x^2 + y^2 - 8y - 13 = 0$
4. a) SI b) NO c) SI
   d) SI e) NO f) NO
5. $C_1(4, -1)$; $r_1 = 2$ $C_2(0, -2)$; $r_2 = 4$
   $C_3(2, 1)$; $r_3 = 3$
6. A = B (Coeficientes de x e y iguales)
7. $(x - 11/6)^2 + (y - 25/6)^2 = 50/36$
8. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 361/25$
9. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$
10. $x^2 + (y-1)^2 = 25$; $(x-3)^2 + (y-10)^2 = 25$
11. $x^2+y^2-6(1\pm\sqrt{2})x-$
12(1$\pm\sqrt{2}$)y+108$\pm$72$\sqrt{2}$ =0
12. $x^2 + y^2 + (4\sqrt{2} - 8)x + (4\sqrt{2} - 8)y = 0$
13. $\left(4+\sqrt{3},\ \ 2+3\sqrt{3}\right)$; $\left(4-\sqrt{3},\ \ 2-3\sqrt{3}\right)$
14. $(x+3)^2 + (y-1)^2 \le 9$
15. (*)
16. $3x + 4y + 1 = 0$; $3x + 4y - 49 = 0$; (7, 7).
17. (*)
18. $2\sqrt{13}$
19. $3x + 4y - 2 = 0$; $x = 2$
20. $\dfrac{10-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
21. $y = \dfrac{7 \pm 2\sqrt{22}}{9}x + \dfrac{20 \pm 2\sqrt{22}}{9}$
22. $x - 2y + 2 = 0$
23. 12 m.
24. 7 m.
25. $3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$
26. (5/11, 6/11)
27. (–8, –8)
28. $6x - 6y + 5 = 0$; Área 5,45 u^2.
29. Sí iluminado porque $PQ \cap \text{Circunf} = \varnothing$
30. $x^2 + y^2 - 16x + 32 = 0$
31. $7x^2 + 7y^2 - 14x + \left(162 \pm 96\sqrt{2}\right)y = 0$
32. $\left(\dfrac{13 \pm \sqrt{17}}{2},\ \dfrac{13 \pm \sqrt{17}}{2}\right)$
33. (*)
34. $(x^2+y^2-4x+2y+5)(x^2+y^2-6x-8y+25) =$
    $= 2x^2+2y^2-10x-6y+4)^2$
35. $|y - 3| = x + y$
36. $x - 5y + 14 = 0$
37. Mediatriz: $x + 2y - 7 = 0$
38. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$
39. $\dfrac{5\sqrt{51} + 4\sqrt{19}}{7}$
40. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$
    $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

1. Halla el centro, vértices, excentricidad y representación gráfica de las elipses:
   a) $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
   b) $x^2 + 9y^2 + 4x - 18y + 12 = 0$
   c) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 31 = 0$

2. Determina el centro, los focos, los vértices, la excentricidad y las asíntotas de las hipérbolas:
   a) $9x^2 - 4y^2 = 36$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
   c) $x^2 - 9y^2 + 2x - 54y - 89 = 0$

3. Halla el vértice, el foco, el eje y la directriz de las parábolas de ecuación:
   a) $y = x^2 + 2x - 3$
   b) $y = -\frac{1}{2} x^2 - x + 1$
   c) $y^2 - 10y + 6x + 31 = 0$

4. Escribe la ecuación de la elipse de focos (–2, 1) y (2, 1) y excentricidad e = 0,8.

5. Escribe la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un vértice en el punto (1, 0) y un foco en el punto (2, 0).

6. Halla el centro, vértices y las asíntotas de la hipérbola $\frac{(y+1)^2}{36} - (x-3)^2 = 1$

7. El sistema LORAN (LOng distance RAdio Navigation) utiliza pulsos sincronizados, que viajan a la velocidad de la luz, emitidos por dos estaciones situadas a cierta distancia una de otra. Supongamos que la distancia entre las estaciones es de 5 Km. El piloto de un avión que sobrevuela la línea que une las estaciones a una altura de 3 Km recibe dos pulsos con una diferencia de tiempos de 10 microsegundos. ¿En qué punto se encuentra el avión?

8. Halla el eje, vértice y la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta y = –3 y cuyo foco es el punto F(1, 1).

9. Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ desde el punto exterior P(4, 0).

10. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a $F\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $F'\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es igual a 4

11. Halla la ecuación de la hipérbola de vértices (–3, 4), (3, 4) y focos (–5, 4) y (5, 4).

12. Halla la ecuación de la parábola con vértice (2, 1) y foco (2, 3).

13. Determina la curva que representa cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$
   b) $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

14. Halla la ecuación de la parábola de eje paralelo a OX y que pasa por los puntos (6, 1), (–2, 3) y (16, 6).

15. Halla la ecuación de la elipse cuyo centro es el (1, 2), un foco (6, 2) y pasa por el punto (4, 6).

16. Halla la ecuación de una cónica, centrada en el origen, de eje mayor OX, que pasa por el punto P(1, 2) y su excentricidad vale 1/2.

17. Dos observadores A y B están situados a 10 Km de distancia el uno del otro en una recta paralela a un río que dista de la recta AB, 8 Km. En la orilla del río se produce una explosión que es percibida por el observador A 20 segundos antes que por el B. Localiza el punto P donde se produjo la explosión (Toma la velocidad del sonido como 300 m/s).

18. Halla la ecuación de la parábola de foco F(2, 2) y directriz la recta x + y = 0.

19. Dada la parábola de ecuación $y^2 = -8x$, determina los puntos de la misma que pertenecen a la recta perpendicular al eje por el foco. Calcula después la longitud de la cuerda de la parábola determinada por estos puntos.

20. La órbita del planeta Marte es una elipse con el Sol en uno de sus focos. Su excentricidad es 0,0935 y la menor distancia de Marte al Sol es 128,5 millones de millas. Encuentra la distancia máxima de Marte al Sol.

21. Hallar las ecuaciones de las tangentes desde el origen a la cónica $y^2 - 2xy + 2y - 4x - 2 = 0$.

22. Halla la ecuación de la elipse de centro C(2, 2), foco F(–1, 2) y semieje mayor $\sqrt{10}$.

23. Dos vértices de una elipse, pertenecientes a ejes distintos son los puntos A(1, 1), $B\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Sabiendo que la ecuación del eje mayor es x + y – 2 = 0, halla la ecuación de la elipse.

24. Sea la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 = 180$. De su foco izquierdo, sale un rayo de luz con pendiente –2 y ese rayo se refleja en un punto de la elipse. Halla la ecuación de la recta que contiene al rayo reflejado.

25. Halla la ecuación de la parábola de foco F(4,0) y directriz 2x – y + 3 = 0.

1. a) C(3, 1); A(1, 1), A'(5, 1); B(3, 0); B'(3, 2); e = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

   b) C(–2, 1); A(–3, 2), A'(1, 2); B(–2, $\frac{2}{3}$); B'(–2, $\frac{4}{3}$); e = $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

   c) C(–2, 1); A(–3, 1), A'(1, 1); B(–2, $-\frac{1}{2}$); B'(–2, $\frac{5}{2}$); e = $\frac{\sqrt{5}}{3}$

2. a) C(0, 0); F'($-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 0); F($\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 0); A(2, 0); A'(–2, 0); e = $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $y = \pm\frac{3}{2}x$

   b) C(0, 0); F'(–5, 0); F(5, 0); A(3, 0); A'(–3, 0); e = $\frac{5}{3}$; $y = \pm\frac{4}{3}x$

   c) C(–2, –3); F'($-2-\sqrt{10}$, –3); F($-2+\sqrt{10}$, –3); A(0, –3); A'(–4, –3); e=$\frac{\sqrt{10}}{3}$; y = 3x+3; y = –3x–9

3. a) V(–1, –4); F(–1, –15/4); eje: x = –1; directriz: y = –17/4
   b) V(–1, –½); F(–1, –1); eje: x = –1; directriz: y = 0
   c) V(–1 , 5); F(–5/2, 5); eje: y = 5; directriz: x = ½

4. $\frac{4x^2}{25}+\frac{4(y-1)^2}{9}=1$

5. $x^2 - y^2/3 = 1$

6. C(3, –1); A'(3, –7); A(3 , 5); B'(2, –1); B(4, –1); y = –6x + 17; y = 6x – 19

7. En el punto medio entre las dos estaciones.

8. Eje: x = 1; V(1, –1); $(x-1)^2 = 8(y+1)$

9. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}x\mp\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}\,xy - 16 = 0$

11. $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-4)^2}{16}=1$

12. $(x-2)^2 = 8(y-1)$

13. a) $(x-½)^2 - y^2/4 = 1$ HIPÉRBOLA b) CIRCUNFERENCIA

14. $x = 2y^2 - 12y + 16$

15. $\frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$

16. $3x^2 + 4y^2 = 19$

17. A 1708 m de A en dirección opuesta a B.

18. $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$

19. (–2, –4) (–2, 4); longitud 8

20. $3,95\cdot10^9$ millas

21. y = 2x; y = 2x/3

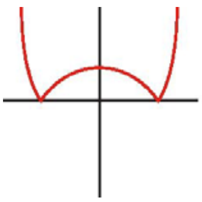
22. $\frac{(x-2)^2}{10}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$

23. $7x^2 + 7y^2 + 2xy - 28x - 4y + 16 = 0$

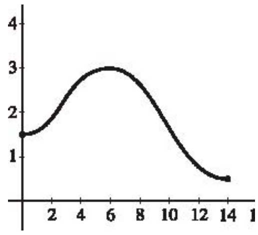
24. 2x + 11y – 10 = 0; x – 2y – 5 = 0

25. $x^2 + 4y^2 + 4xy - 52x + 6y + 71 = 0$

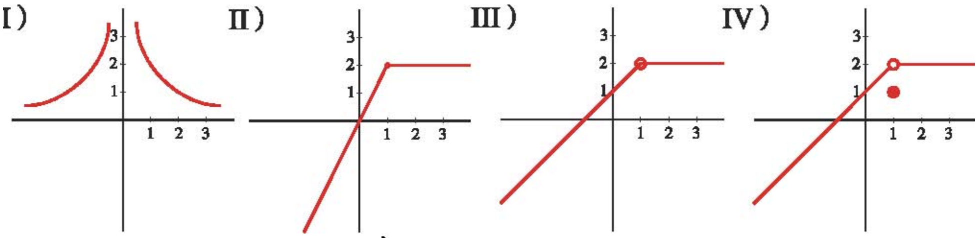
1. Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función. Razona tu respuesta:

a)  b) 

2. La siguiente gráfica corresponde a la función y = f(x). a) ¿Cuál es su dominio de definición? b) Indica los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente. c) ¿En qué punto tiene la función su máximo?

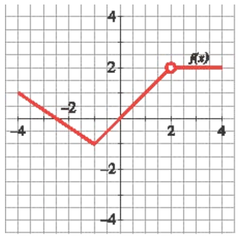


3. Dadas las funciones:



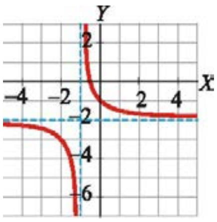
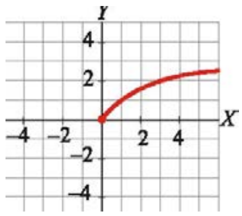
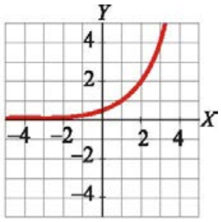
a) Di si son continuas o no. b) Halla la imagen de x = 1 para cada una de ellas.

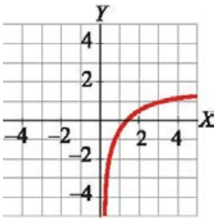
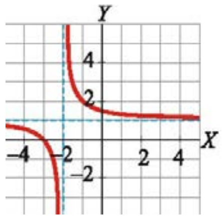
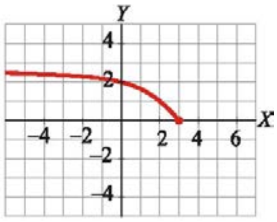
4. Dada la gráfica de la figura: a) Di si f(x) es continua o no. Razona tu respuesta. b) Halla f (–1), f(0), f(2) y f(3).



5. Halla f (–1), f(0) y f(2), siendo $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si} \quad x \le -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

6. A partir de la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio y su recorrido:

a)  b)  c) 

d)  e)  f) 

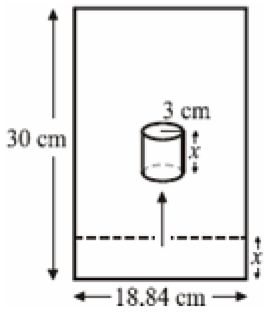
7. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1}{x^2-16}$ b) $y = \sqrt{1+2x}$ c) $y = \dfrac{x}{x^2-4}$ d) $y = \sqrt{2x}$ e) $y = \dfrac{1}{x^2+4}$

f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ g) $y = \dfrac{1}{x^2-2x}$ h) $y = \sqrt{6+3x}$ i) $y = \dfrac{3}{(x-5)^2}$ j) $y = \sqrt{2x-4}$

k) $y = \dfrac{1}{x^2-9}$ l) $y = \sqrt{x-2}$ m) $y = \dfrac{2+x}{x^2}$ n) $y = \sqrt{3x-1}$ ñ) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

o) $y = \dfrac{1}{3x-x^2}$ p) $y = \sqrt{x^2-1}$ q) $y = \dfrac{2x}{(x-3)^2}$ r) $y = \dfrac{3-x}{\sqrt{2x-4}}$ s) $y = \dfrac{1}{x^2-2x+4}$



8. Tenemos una hoja de papel de base 18,84 cm y altura 30 cm. Si recortamos por una línea paralela a la base, a diferentes alturas, y enrollamos el papel, podemos formar cilindros de radio 3 cm y altura x. Escribe la función que expresa el volumen del cilindro en función de x. ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

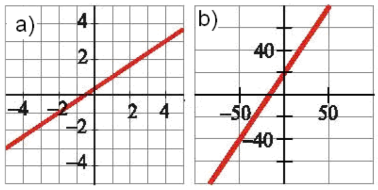
9. De un cuadrado de lado 10 cm se recorta una tira de x cm en la base y otra de la misma longitud en la altura, obteniéndose un nuevo cuadrado. Expresa la función que determina el área de este nuevo cuadrado. ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

10. Vamos a considerar todos los rectángulos de 30 cm de perímetro. Si llamamos x a la longitud de la base, ¿qué función nos proporciona el área del rectángulo? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

11. Representa gráficamente: a) $y = \frac{3}{2}x - 2$; b) $y = -0{,}5x + 3{,}5$; c) $y = -\frac{3}{5}x + 1$; e) $y = \frac{4-2x}{5}$

12. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, − 4) y (−2, 3).

13. Escribe las ecuaciones de las rectas cuyas gráficas son:



14. Halla la ecuación de la recta que pasa por (−1, 2) y cuya pendiente es −1.

15. Representa gráficamente las funciones:
a) $y = -x^2 + 4x - 1$ b) $y = (x + 1)^2 - 3$ c) $y = -x^2 + 4$ d) $f(x) = -2x^2 + 4x$

16. a) Representa gráficamente: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
b) Halla el vértice de la parábola: $y = 2x^2 - 10x + 8$.

17. a) Obtén la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–2, –1) y (1, 3) y represéntala.
b) Halla los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = x^2 - 4x$.

18. a) Escribe la pendiente de cada una de las rectas: I) $2x + y = 0$; II) $x - 2y + 1 = 0$; III) $y = 2$
b) Representa gráficamente: $y = x^2 - 3x$.

19. a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (–1, 3) y tiene pendiente –1.
b) Representa gráficamente: $y = -x^2 + 4$

20. a) Representa gráficamente: $2x + y - 1 = 0$
b) Halla el vértice de la parábola: $y = 2x^2 - 8x + 2$

21. Representa gráficamente las funciones: a) $y = \frac{-3}{x+4}$; b) $y = \frac{-1}{x-3} - 2$; c)) $y = -1 + \frac{2}{x-5}$

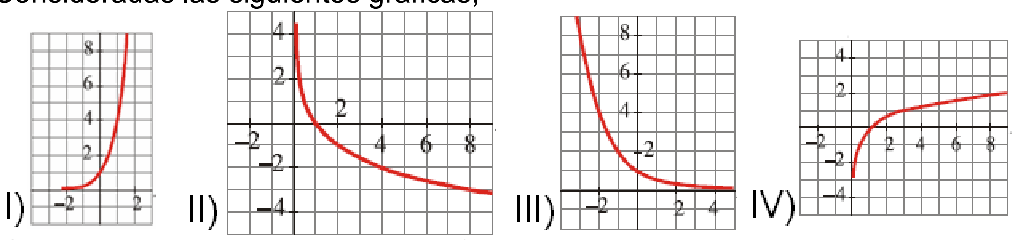
22. Representa gráficamente las funciones: a) $y = 1 - \sqrt{-3x}$; b) $y = \sqrt{3x-1}$; c) $y = \sqrt{2x+3} - 1$

23. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = 2^{1-x}$ b) $y = \log_{1/4}x$ c) $y = 1 - \log_2 x$ d) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}$ e) $y = 3^{x+1}$

24. Consideradas las siguientes gráficas,

I) II) III) IV)



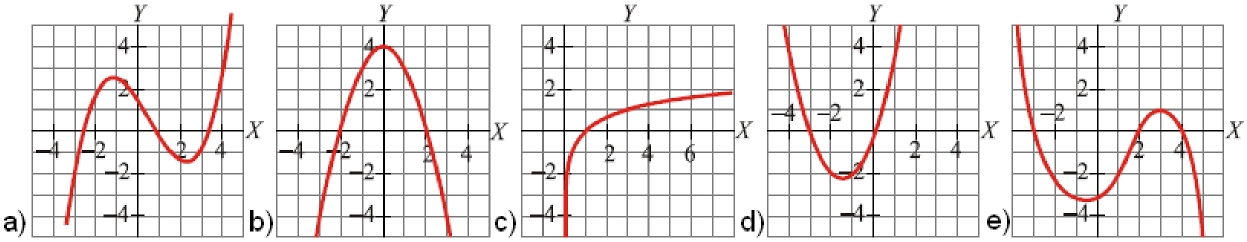
a) Halla la expresión analítica de la función correspondiente.

b) ¿Cuál es el dominio de dicha función?
c) Estudia la continuidad y el crecimiento.

25. Representa gráficamente las funciones:

a) $y = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} \dfrac{1-x}{2} & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

26. Representa gráficamente la función y = |f(x)|, sabiendo que la gráfica de y = f(x) es la siguiente:



27. Define como funciones "a trozos":

a) y = |2x + 4| b) y = |–x + 3| c) $y = \left|\dfrac{x+1}{2}\right|$ d) y = |3x – 2| e) $y = \left|\dfrac{3x+1}{2}\right|$

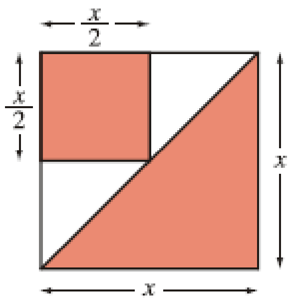
28. En algunos países se utiliza un sistema de medición de la temperatura distinto a los grados centígrados que son los grados Farenheit. Sabiendo que 10 °C = 50 °F y que 60 °C = 140 °F, obtén la ecuación que nos permita traducir temperaturas de °C a °F.

29. En un contrato de alquiler de una casa figura que el coste subirá un 2% cada año. Si el primer año se pagan 7200 euros (en 12 recibos mensuales):
a) ¿Cuánto se pagará dentro de 1 año? ¿Y dentro de 2 años?
b) Obtén la función que nos dé el coste anual al cabo de x años.

30. Con 200 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared. a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados? b) Construye la función que nos da el área del recinto.

31. Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0 °C se calienta, y su dilatación viene dada por una función lineal ℓ = a + bt, donde ℓ es la longitud (cm) y t es la temperatura (°C).
a) Halla la expresión analítica de ℓ, sabiendo que ℓ(1) = 30,0005 cm y ℓ(3) = 30,0015 cm.
b) Representa gráficamente la función obtenida.

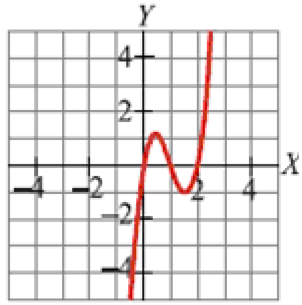
32. En un cuadrado de lado x cm, consideramos el área de la parte que está coloreada:



a) Halla la ecuación que nos da el valor de dicha área, y, en función del lado del cuadrado, x.
b) Representa gráficamente la función obtenida.

33. Un tendero tiene 20 kg de manzanas que hoy venderá a 40 céntimos de euro/kg. Cada día que pasa se estropeará 1 kg y el precio aumentará 10 céntimos de euro/kg.
a) Escribe la ecuación que nos da el beneficio obtenido en la venta, y, en función de los días que pasan hasta que vende las manzanas, x.
b) Representa la función obtenida, considerando que x puede tomar cualquier valor x ≥ 0.

34. La siguiente gráfica representa y = f(x).
A partir de ella, representa a) y = f(x) + 3; b) y = f(x + 2)



35. Dadas las siguientes funciones: $f(x) = \dfrac{-3x+2}{2}$ y $g(x) = x^2 + 1$, halla: a) (f∘g)(x) b) (g∘g)(x)

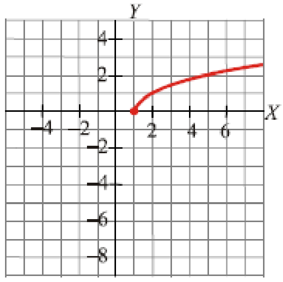
36. Las funciones f y g están definidas por $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y g(x) = x + 1.
Calcula: a) (f∘g)(x) b) (g∘g∘f)(x)

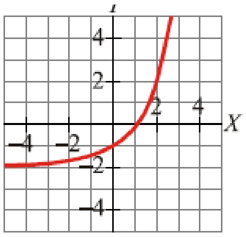
37. Sabiendo que: $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$, explica cómo se pueden obtener por composición, a partir de ellas, las siguientes funciones: $p(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$ $\quad q(x) = \dfrac{1}{3x^2+2}$

38. Explica cómo se pueden obtener por composición las funciones p(x) y q(x) a partir de f(x9 y g(x), siendo: $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, $p(x) = 2\sqrt{x-2} - 3$ y $q(x) = \sqrt{2x-5}$

39. Las funciones f y g están definidas por: $f(x) = \dfrac{x-1}{3}$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Explica cómo se pueden obtener por composición, a partir de ellas, las funciones: $p(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{3}}$ y $q(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{3}$

40. Esta es la gráfica de la función y = f(x).
a) Calcula $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$.
b) Representa en los mismos ejes $f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de f(x).



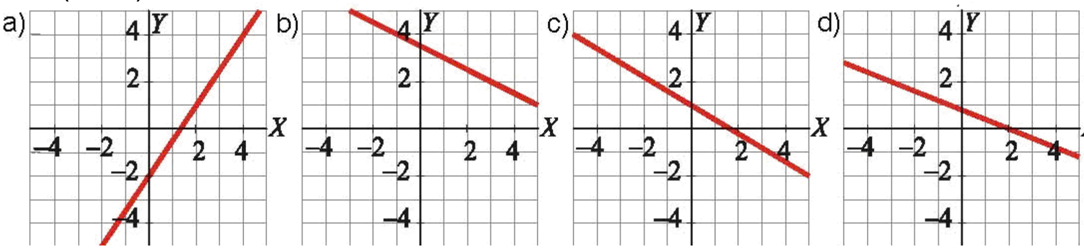


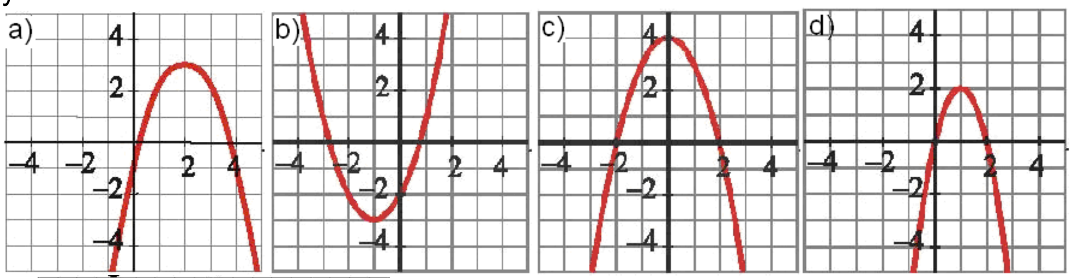
41. Dada la gráfica de la función y = f(x).
a) Calcula $f^{-1}(-1)$ y $f^{-1}(0)$.
b) Representa en los mismos ejes $f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de f(x).

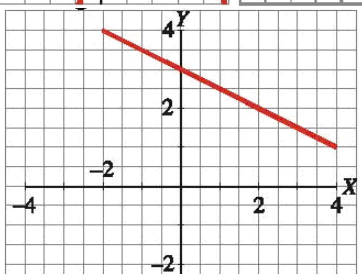
42. Halla la función inversa de:

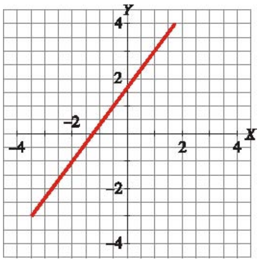
a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$ $\quad$ b) $f(x) = \dfrac{2-3x}{4}$ $\quad$ c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ $\quad$ d) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x-3}$

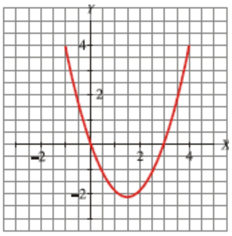
e) $f(x) = e^{x-1}$ $\quad$ f) $f(x) = \log(3x + 2)$ $\quad$ g) $f(x) = \text{sen}(2 - 3x)$ $\quad$ h) $f(x) = e^{\cos x}$

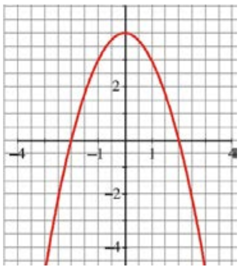
1. a) es función; b) no lo es.
2. a) [0, 14]; b) Creciente en (0, 6) y decreciente en (6, 14); c) (6, 3)
3. a) Solo es continua la II). b) I) y = 2 II) y = 2 III) y no está definida. IV) y = 1
4. a) No es continua: $\nexists$ f(2). b) f (−1) = −1; f (0) = 0; $\nexists$ f (2); f (3)= 2.
5. f (−1) = 2; f (0) = 1; f(2) = 3
6. a) Df = R − {−1}; Rf = R – {-2}; b) Df = [0, +∞); Rf = [0,∞); c) Df = R − {0}; Rf = (0, +∞); d) Df = (0, +∞); Rf = R e) Df = R – {-2}; Rf = R – {1} f) Df = (-∞, 3]; Rf = [0, +∞)
7. a) R − {−4, 4}; b) {– ½ , +∞); c) R − {−2, 2}; d) [0, +∞); e) R; f) (2, +∞); g) R − {0, 2}; h) [−2, +∞); i) R – {5}; j) [2, +∞); k) R − {− 3, 3}; l) [2, +∞); m) R − {0}; n) [1/3, +∞); ñ) (0, +∞); o) R − {0, 3}; p) (−∞, −1] ∪ [1, +∞); q) R − {3}; r) [–2, +∞); s) R – {2}
8. Df = (0, 30)
9. Df = (0, 10)
10. Df = (0, 15)
11. 

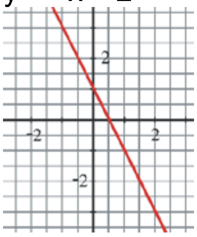
12. $y = -\frac{7}{5}x + \frac{1}{5}$
13. a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ b) $y = \frac{6}{5}x + 20$
14. y = –x + 1
15. 

16. a)  b) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

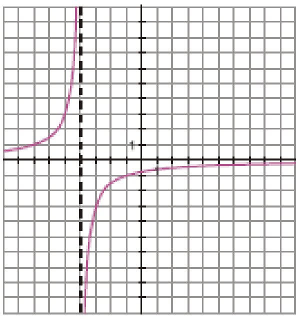
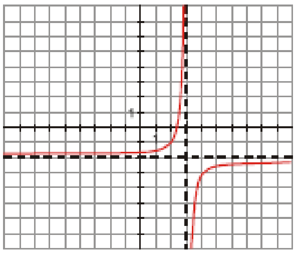
17. a) $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$;  b) (0, 0) y (4, 0)

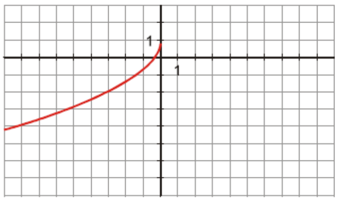
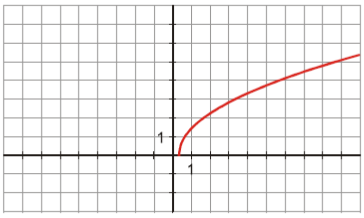
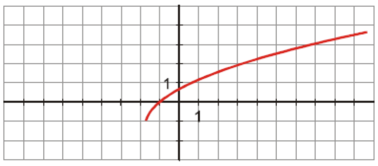
18. a) I) –2; II) ½ ; III) 0 b) 

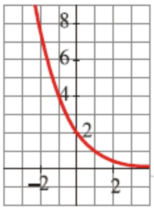
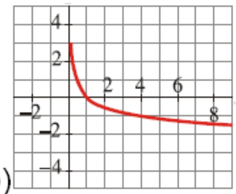
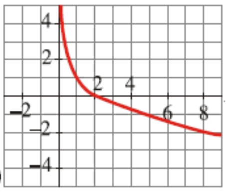
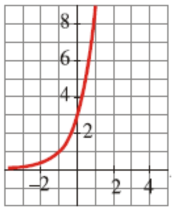
19. a) y = –x + 2 b) 



20. a) b) (2, –6)

21.   

22.   

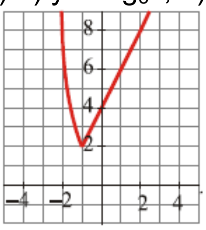
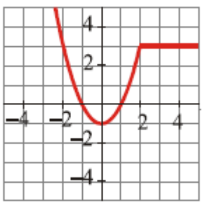
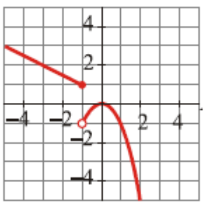
23. a)  b)  c)  d)  e) 

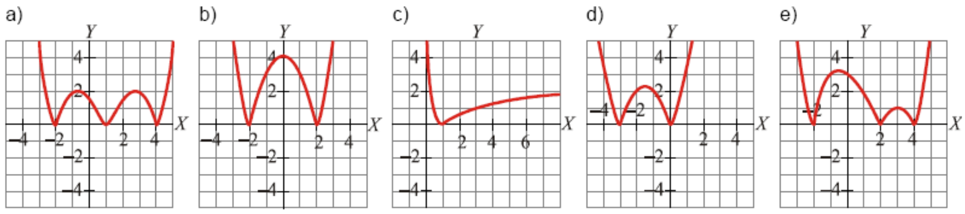
24. I) a) $y = 4^x$; b) Df = R; c) Es una función continua y creciente.

II) a) $y = \log_{1/2}x$; b) Df = $(0, +\infty)$; c) Es una función continua y decreciente.

III) a) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; b) Df = R; c) Es una función continua y decreciente.

IV) a) $y = \log_3 x$; b) Df = $(0, +\infty)$; c) Es una función continua y creciente.

25. a)  b)  c) 

26. 

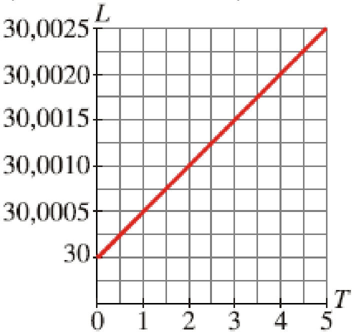
27. a) $y = \begin{cases} -2x-4 & \text{si} \quad x < -2 \\ 2x+4 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x < 3 \\ x-3 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -\dfrac{x+1}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} -3x+2 & \text{si} \quad x < \dfrac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{2}{3} \end{cases}$ e) $y = \begin{cases} -\dfrac{3x+1}{2} & \text{si} \quad x < \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{3x+1}{2} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{-1}{3} \end{cases}$

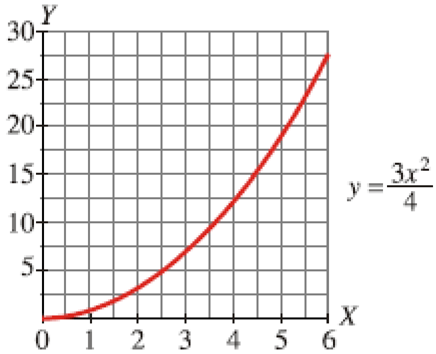
28. $y = \dfrac{9}{5}x + 32$

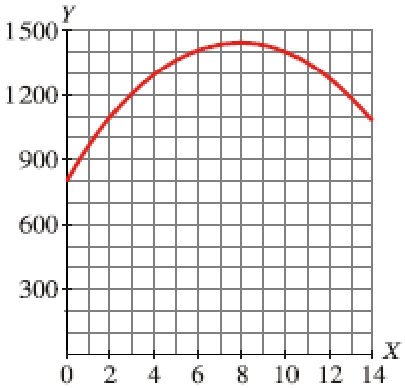
29. a) Dentro de 1 año se pagarán 7344 €. Dentro de 2 años 7490,88 €.b) y = 7200 · 1,02x €.

30. a) x, 200 – 2x, x; b) Área = $200x - 2x^2$

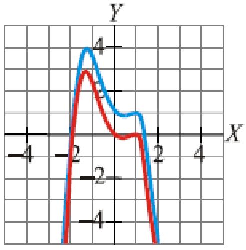
31. 

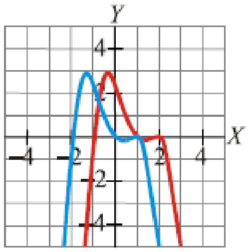
$l = 30 + 0{,}0005t$

32. 

33. 

$y = -10x^2 + 160x + 800$

34. a) 

b) 

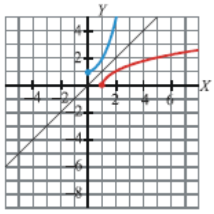
35. a) $(f\circ g)(x) = \dfrac{-3x^2-1}{4}$ b) $(g\circ g)(x) = x^4 + 2x^2 + 2$

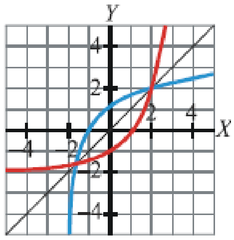
36. a) $(f\circ g)(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{3}$ b) $(g\circ g\circ f)(x) = \dfrac{x^2}{3} + 2$

37. $p(x) = (f\circ g)(x)$ $q(x) = (g\circ f)(x)$

38. $p(x) = (f\circ g)(x)$ $q(x) = (g\circ f)(x)$

39. $p(x) = (g\circ f)(x)$ $q(x) = (f\circ g)(x)$

40. a) $f^{-1}(0) = 1$; $f^{-1}(2) = 5$ b) 

41. a) $f^{-1}(-1) = 0$; $f^{-1}(0) = 1$ b) 

42. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2}$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{2-4x}{3}$ c) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$ d) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-1}{2x-3}$

e) $f^{-1}(x) = 1 + \mathrm{Ln}x$ f) $f^{-1}(x) = \dfrac{10^x-2}{3}$ g) $f^{-1}(x) = \dfrac{2-\mathrm{arcsen}x}{3}$ h) $f^{-1}(x) = \mathrm{arccos}\,\mathrm{Ln}x$

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-6x+1)$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x+1)$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+x)$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4x+4}}$ 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{-2x^4+3x^3-6}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2}$ 11) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^2-6x}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^2}{x^5+1}$ 14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^5+x^2}{2x^2-1}$ 15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$ 17) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt[3]{x^2+2}-x\right)$ 18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ 20) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$ 21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

22) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x-1}{2x-4}\right)^{\frac{1}{x-3}}$ 23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$ 24) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\right)$ 26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+1}\left(\sqrt{2x^5-2x}-\sqrt{2x^5+3x}\right)\right)$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right)\right)$ 28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-6x}-(x-3)}{x+3-\sqrt{x^2+6x}}$ 29) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1}$

30) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+1)^3}{(x+3)^4}$ 31) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$ 32) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}$

33) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}$ 34) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}$ 35) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}-\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

36) $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$ 37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$ 38) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

39) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$ 40) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$ 41) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-|x|}{2x}$

42) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-|x|}{2x}$ 43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-|x|}{2x}$ 44) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-|x|}{2x}$

45) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-|x|}{2x}$ 46) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^2-2|x-1|-1}$ 47) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2|x-1|-1}$

48) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2|x-1|-1}$ 49) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$ 50) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$ 51) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x}$

52) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a}$ 53) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ 54) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{x^2}$

55) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 56) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x^2-1}\right)$ 57) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x^2-1}\right)$ 58) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{sen}6x}{x}$

59) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}6x}{x}$ 60) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{sen}x}{\pi-x}$ 61) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-5x+6}$ 62) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{7x}$

63) $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}\right)$ 64) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x^2-3x+2)}{x^2-4}$ 65) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\operatorname{sen}(x^2-16)}$

66) $\lim_{x\to 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{2x-1}$

67) $\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

68) $\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

69) $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sen}x}{x}$

70) $\lim_{x\to\infty} \mathrm{arctg}x$

71) $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}x$

72) $\lim_{x\to\infty} \mathrm{arcsen}x$

73) $\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{1/\mathrm{sen}x}$

74) $\lim_{x\to 0} (1+\mathrm{sen}x)^x$

75) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$

76) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\mathrm{sen}x}$

77) $\lim_{h\to 0} \frac{\log(3+h)-\log 3}{h}$

78) $\lim_{x\to\infty} \left(x\log\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)$

79) $\lim_{x\to\infty} \left(\log\left(x^2-2x+6\right)-\log\left(2x^2+3x-5\right)\right)$

80) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\cos^2 x\right)}{x^2}$

81) $\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(5+h^2\right)-\ln 5}{h^2}$

82) $\lim_{x\to 3^+} \left(\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)+\ln\left(\frac{x}{x-3}\right)\right)$

83) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{x}{1-x}\right)+\log\left(\frac{1-x^2}{x}\right)}{3x}$

SOLUCIONES

1. –2
2. +∞
3. +∞
4. $\frac{a-1}{2a}$
5. 3/2
6. 0
7. – ½
8. 0
9. – ½
10. +∞
11. 2
12. +∞
13. 0
14. +∞
15. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$
16. 0
17. –2
18. 0
19. ½
20. 1
21. 1
22. $\frac{1}{\sqrt{e}}$
23. –1
24. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
25. 1
26. $-\frac{5\sqrt{2}}{4}$
27. –1
28. –1
29. –2
30. –∞
31. 2
32. 9/17
33. 5/4
34. 2
35. –15/4
36. 1
37. $\sqrt{3}$ + 1
38. 2
39. +∞
40. No existe
41. 0
42. 0
43. $\ell^- = 1$; $\ell^+ = 0$
44. 0
45. 1
46. 1/3
47. 1
48. 1
49. 1
50. 1
51. 1
52. cos(a)
53. –sen(a)
54. –20
55. ½
56. No existe
57. 0
58. 0
59. 6
60. 1
61. –1
62. 5/7
63. tg(¼)
64. ¼
65. 1/32
66. –π/2
67. 1
68. 0
69. 0
70. π/2
71. –π/2
72. No existe
73. e^3
74. 1
75. e
76. 1
77. $\frac{1}{3\mathrm{Ln}10}$
78. $\frac{3}{\mathrm{Ln}10}$
79. log(½)
80. –1
81. 1/5
82. –Ln(2 $\sqrt{3}$)
83. $\frac{1}{3\mathrm{Ln}10}$

1. Averigua el valor de *a* para que la función $f(x) = \begin{cases} ax+5 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2+a & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$ sea continua.

2. Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4-(x+2)^2}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ sea continua en todo R.

3. Halla los puntos de discontinuidad de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x-1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x-6 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

d) $i(x) = E[x]$ e) $j(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3} & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x+2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ f) $k(x) = x - E[x]$

4. Deseamos transportar x litros de vino desde una bodega a la planta embotelladora. El transporte se realiza en una furgoneta con capacidad para 500 litros. Cada viaje de la furgoneta cuesta 18 euros. Llamando p al precio por litro transportado, escribe la función p(x) y representarla en el intervalo [200,1500]. ¿Dónde tiene discontinuidades esta función?

5. Tras un estudio demográfico, se ha determinado que el número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x) = \frac{14500x+7200}{2x+1}$, donde x es el número de años transcurridos de ahora en adelante.

a. ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente? b. ¿Y dentro de dos años?

c. Si la función fuese válida de forma indefinida, ¿crees que la población crecería de forma indefinida? Justifica la respuesta.

6. Una empresa dedicada a montajes en cadena ha determinado que el número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento, de acuerdo con la función $M(t) = \frac{30t}{t+4}$, donde t es el tiempo en días.

a. ¿Cuántos montajes realiza el primer día?

b. Justifica que el número de montajes crece al tiempo que los días de entrenamiento.

c. ¿Qué ocurriría con el número de montajes, si nunca acabara el entrenamiento?

7. En cierto país, las tarifas del servicio de correos son las siguientes:

- Cartas hasta 20 gramos de peso: 32 céntimos.
- Por cada 10 gramos o fracción de 10 gramos de exceso de peso, se añaden 5 cts. más.

a. Escribe y representa gráficamente la función. b. Estudia su continuidad.

8. Un almacén tiene la siguiente tarifa de precios para la venta de paquetes de un producto: de 1 a 50 paquetes, el precio del paquete es de 2'5 euros; de 51 a 100 paquetes, el precio del paquete es de 2'2 euros, y si el número de paquetes es igual o mayor que 101 el precio por paquete es de 2 euros.

a. Escribe la función que relaciona el número de paquetes con el precio.

b. Encuentra los puntos de discontinuidad si los tiene.

9. La fusión de dos cadenas de centros comerciales en el año 2001 produce unos beneficios anuales en millones de euros, según la función $f(x) = 80 + \frac{100x}{x+20}$, siendo x el número de años transcurridos desde la fusión. ¿Qué beneficio obtendrán en el año 2005? Si se supone que los beneficios se mantienen de forma indefinida según f(x) ¿a qué cantidad se aproximan los beneficios?

10. Calcula, usando la definición, la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ en $x_0 = 2$ b) $f(x) = x^3 - 1$ en $x_0 = -1$ c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x_0 = 3$

d) $f(x) = \frac{3}{x-1}$ en $x_0 = 2$ e) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en $x_0 = 1$ f) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x_0 = \pi$

11. Calcular, haciendo uso de la definición, las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ d) $f(x) = \cos(3x)$ e) $f(x) = \operatorname{Ln} x$

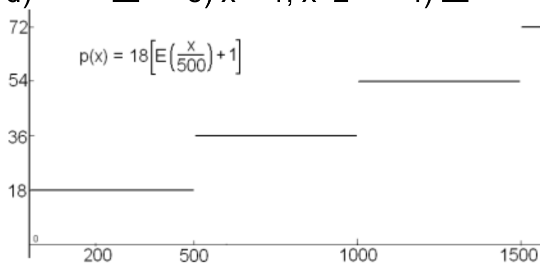
12. Calcula, mediante las tablas y las reglas de derivación, las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$ 2. $y = \frac{1}{x^4} - \frac{5}{x^2} + 3x - 7$ 3. $y = \sqrt[5]{x^2} + 4\sqrt[4]{x^3}$

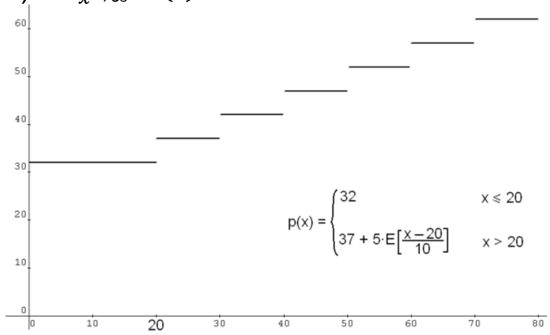
4. $y = 5(x-1)(2x^3-2)(x^2+3)$
5. $y = 1 + \sqrt{1+x^2}$
6. $y = x^4 - \sqrt[4]{x^3 - x}$
7. $y = \frac{x^2 - 6x + 2}{x + 1}$
8. $y = \frac{x^3 + 1}{x}$
9. $y = x^5 - 3x^4 + 7x - 12$
10. $y = \frac{x + 6}{x^2 - 3x + 5}$
11. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
12. $y = (2x^2 + 3x - 1)^4$
13. $y = \frac{x^3 - 1}{(x + 1)^2}$
14. $y = 7x^2 - 3x + \frac{12x - 1}{x + 3}$
15. $y = x\cdot\sqrt{x^2 + 1}$
16. $y = \frac{2x + 1}{\sqrt{x - 3}}$
17. $y = \sqrt{\frac{3x + 1}{3x - 1}}$
18. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$
19. $y = x^2 Lnx + xLnx + 1$
20. $y = x^4 + 4^x + 4^4$
21. $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$
22. $y = senx^2 + sen^2x + sen^2x^2$
23. $y = tg^3(cos^2x) - cotg^4(sen^3x)$
24. $y = (sen^2x + cos^2x)^8$
25. $y = 3^{\sqrt{cosx}}$
26. $y = \frac{senx + cosx}{senx - cosx}$
27. $y = x^3 \cdot e^x$
28. $y = \frac{e^x}{x - 1}$
29. $y = \frac{xe^x}{(x + 2)^2}$
30. $y = \frac{x^2 - 1}{e^x}$
31. $y = (x + e^x)Lnx$
32. $y = e^{2x}\cdot tgx^2$
33. $y = e^{tg2x}$
34. $y = x^3 + 37^x + Log_3x$
35. $y = 7^{x^2 + 1}\cdot log_7(2x + 1)$
36. $y = \frac{Lnx^2}{3^{x^2 + 1}}$
37. $y = cos^4\left(\sqrt{x}\right)$
38. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{x^2}$
39. $y = cos^2x + e^{senx}$
40. $y = \frac{1}{3}tg^3x - tgx + x$
41. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + Ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$
42. $y = Ln\sqrt{sen2x}$
43. $y = Ln\sqrt{\frac{1 + senx}{1 - senx}}$
44. $y = x\cdot arcsenx + \sqrt{1 - x^2}$
45. $y = arctg\frac{1 + x}{1 - x}$
46. $y = arctg\frac{senx}{1 + senx}$
47. $y = arcsen\frac{x}{x + 1}$
48. $senx + cosy = \frac{1}{2}$
49. $x\cdot y = 5$
50. $x^3 + y^3 + 3xy^2 - 2xy + 1 = 0$
51. $\frac{x + y}{x - y} = 1$

13. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, que es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.
14. a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$.
 b) ¿Es creciente o decreciente $f(x)$ en $x = 2$?
15. Dada la función: $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$: a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$? b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.
16. a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.
 b) Halla los tramos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.
17. Consideramos la función: $f(x) = 5x^2 - 3x$. a) ¿Crece o decrece en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$? b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.
18. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones: a) $f(x) = 8x - x^2$; b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4}$
19. Dada la función: $f(x) = 14x - 7x^2$. a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 4$? b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.
20. Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$.
21. Averigua los puntos de tangente horizontal de $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$ y represéntalos gráficamente.
22. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + 3xy^2 - 2y^3 - 9 = 0$ en el punto (3, 0).
23. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto P(2, 3) a la curva $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3 - x}$
24. Se da la curva de ecuación $xy = 1$. Comprueba que el segmento de la tangente a dicha curva en el punto (3, 1/3), comprendido entre los ejes de coordenadas, está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

1. a = 2
2. k = –2
3. a) x = 0 b) C(R) c) x = 2
   d) $\mathbb{Z}$ e) x=–1; x=2 f) $\mathbb{Z}$

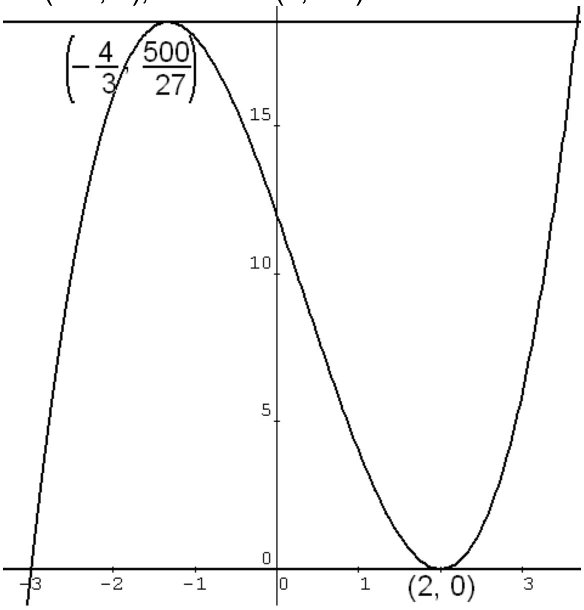


4. Disc: 500, 1000 y 1500
5. a) 7200 b) 7240 c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 7250$
6. a) 6 b) $M'(t) = \frac{120}{(t+4)^2} > 0$
   c) $\lim_{x\to\infty} M(t) = 30$

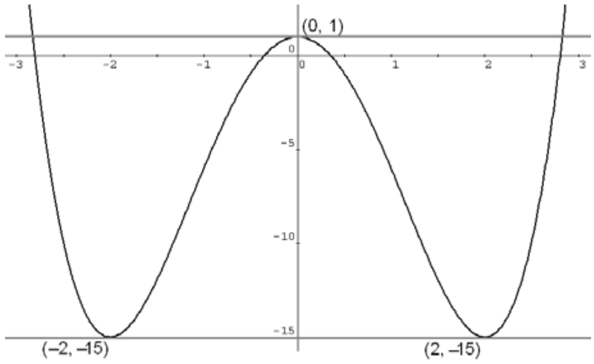


7.
8. $p(x) = \begin{cases} 2{,}5x & si\ \ 1 \le x \le 50 \\ 2{,}2x & si\ 51 \le x \le 100 \\ 2x & si\ x \ge 101 \end{cases}$, x∈ℕ, por tanto, discontinua siempre.
9. ≅ 179 €; 180 €
10. a) 17 b) 3 c) ¼ d) –3 e) ¼ f) –1
11. a) f'(x) = 2x – 3 b) f'(x) = $\frac{-1}{(x-1)^2}$
    c) f'(x) = $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ d) f'(x) = –3sen(3x)
    e) f'(x) = 1/x
12. 1. y' = $6x^2 - 8x + 5$
    2. y' = $\frac{10}{x^3} - \frac{4}{x^5} + 3$
    3. y' = $\frac{3}{\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$
    4. y' = $10(6x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 2x - 3)$
    5. y' = $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
    6. y' = $4x^3 + \frac{1-3x^2}{4\sqrt[4]{x^3(x^2-1)^3}}$
    7. y' = $\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$
    8. y' = $2x - \frac{1}{x^2}$
    9. y' = $5x^4 - 12x^3 + 7$
    10. y' = $-\frac{x^2+12x-23}{(x^2-3x+5)^2}$
    11. y' = $-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$
    12. y' = $4(2x^2 + 3x - 1)^3(4x + 3)$
    13. y' = $\frac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$
    14. y' = $14x - 3 + \frac{37}{(x+3)^2}$
    15. y' = $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$
    16. y' = $\frac{2x-13}{2(x-3)\sqrt{x-3}}$
    17. y' = $\frac{3\sqrt{\frac{3x+1}{3x-1}}}{(3x+1)(1-3x)}$
    18. y' = $\frac{1}{3} - \frac{3}{x^2}$
    19. y' = (2x + 1)Lnx + x + 1
    20. y' = $4x^3 + 4^x Ln4$
    21. y' = $-\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$
    22. y' = $2x\cdot cosx^2 + 2sen2x + 2xsen(2x^2)$
    23. y' = $\frac{12sen^2x\cdot cosx\cdot cos^3(sen^3x)}{sen^5(sen^3x)} - \frac{6senx\cdot sen^5(cosx)}{cos^7(cosx)}$
    24. y' = 0
    25. y' = $-\frac{3^{\sqrt{cosx}}\cdot Ln3\cdot senx}{2\sqrt{cosx}}$
    26. y' = $-\frac{2}{(cosx-senx)^2}$
    27. y' = $e^x(x^3 + 3x^2)$
    28. y' = $\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$
    29. y' = $\frac{e^x(x^2+x+2)}{(x+2)^3}$
    30. y' = $-\frac{x^2-2x-1}{e^x}$
    31. y' = $e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + \ln x + 1$
    32. y' = $2e^{2x}(xtg^2x^2 + tgx^2 + x)$
    33. y' = $2e^{tg2x}(1 + tg^2 2x)$
    34. y' = $3x^2 + 37^x Ln37 + \frac{1}{x\ln 3}$
    35. y' = $7^{x^2+1}\left(2xLn(2x+1) + \frac{2}{(2x+1)\ln 7}\right)$
    36. y' = $\frac{1}{3^{x^2+1}}\left(\frac{2}{x} - 2xLn3Lnx^2\right)$
    37. y' = $-\frac{2sen\sqrt{x}cos^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
    38. y' = $x^{\frac{x^2+2}{2}}\left(Lnx + \frac{1}{2}\right)$
    39. y' = $-sen2x + e^{senx}cosx$
    40. y' = $2tg^2x + 3tg^4x$
    41. y' = $\sqrt{x^2+1}$
    42. y' = 2ctg2x
    43. y' = $\frac{1}{cosx}$
    44. y' = arcsenx
    45. y' = $\frac{1}{1+x^2}$
    46. y' = $\frac{cosx}{2sen^2x+2senx+1}$
    47. y' = $\frac{1}{|x+1|\sqrt{2x+1}}$
    48. y' = $\frac{cosx}{senx-\frac{1}{2}}$
    49. y' = $-\frac{5}{x^2}$
    50. y' = $-\frac{3x^2+3y^2-2y}{3y^2+6xy-2x}$
    51. y' = 0

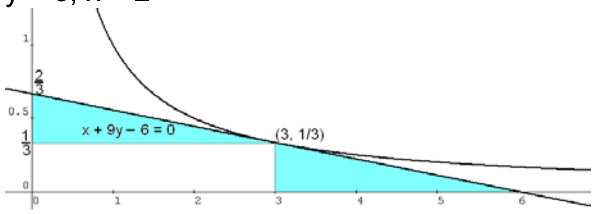
13. $48x + 72y - 23 = 0$
14. a) $5x + y + 1 = 0$ b) Crece
15. a) Decrece/Crece b) Decrece $(-\infty, \frac{1}{8})$; Crece $(\frac{1}{8}, +\infty)$
16. a) $10x + y - 12 = 0$ b) Crece $(-\infty, \frac{1}{3})$; Decrece $(\frac{1}{3}, +\infty)$
17. a) Decrece/Crece b) Decrece $(-\infty, 0{,}3)$; Crece $(0{,}3; +\infty)$
18. a) Crece $(-\infty, 4)$; Decrece $(4, +\infty)$
    b) Decrece $(-\infty, 1{,}5)$; Crece $(1{,}5; +\infty)$
19. a) Crece/Decrece b) Crece $(-\infty, 1)$; Decrece $(1, +\infty)$
20.



21.



22. $x = 3$
23. $y = 3$; $x = 2$
24.



1. Para cada uno de los siguientes casos indica:
   - Cuáles son las variables que se relacionan.
   - Cuál es el colectivo de individuos que se estudia.
   - Si se trata de una relación funcional o de una relación estadística.
   - El signo de la correlación.

   a) Familias: estatura media de padres – estatura media de los hijos mayores de 17 años.
   b) Entre los países europeos: volumen de exportación – volumen de importación (con España).
   c) Entre los países del mundo: índice de mortalidad infantil – número de médicos por cada 1000 habitantes.
   d) kW·h consumidos en cada casa de una ciudad durante el mes de enero – coste del recibo de la luz.
   e) Coste del recibo de la luz – número de personas que viven en cada casa.

2. Una distribución bidimensional en la que los valores de x son 12, 15, 17, 21, 22 y 25, tiene una correlación r = 0,99 y su recta de regresión es y = 10,5 + 3,2x. Calcula $\hat{y}(13)$, $\hat{y}(20)$, $\hat{y}(30)$, $\hat{y}(100)$. ¿Cuáles de las estimaciones anteriores son fiables, cuál poco fiable y cuál no se debe hacer. Expresa los resultados en términos adecuados. (Por ejemplo: $\hat{y}(13) = 52{,}1$.

3. Los parámetros correspondientes a esta distribución bidimensional son:

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

   $\bar{x} = 4{,}4$ $\quad \bar{y} = 4{,}9$ $\quad \sigma_{xy} = 3{,}67$ $\quad \sigma_x = 2{,}77$ $\quad \sigma_y = 2{,}31$ $\quad r = 0{,}57$

   Halla las ecuaciones de las dos rectas de regresión, X sobre Y e Y sobre X, y represéntalas junto con la nube de puntos.

4. Representa estos puntos y, sin efectuar cálculos, contesta las siguientes preguntas:

x	1	2	3	4	5	6
y	10	8	6	4	2	0

   a) ¿Cuánto vale el coeficiente de correlación?
   b) ¿Cómo son las dos rectas de regresión? Escribe su ecuación.
   c) A la vista de la respuesta anterior, da el valor de m_{yx} y el de m_{xy}

5. Calcula el coeficiente de correlación entre estas dos variables:

x : ALTITUD	365	450	350	220	150
y : LITROS DE LLUVIA	240	362	121	145	225

6. La media de los pesos de los individuos de una población es de 65 kg y la de sus estaturas, 170 cm. Las desviaciones típicas son 5 kg y 10 cm, respectivamente, y la covarianza de ambas variables es 40.
   a) ¿Cuál es el coeficiente de correlación?
   b) Calcula la recta de regresión de los pesos respecto de las estaturas.
   c) ¿Cuánto estimas que pesará un individuo de 180 cm de estatura?

7. Estudia la correlación entre estas dos variables y explica el resultado:

	Esp.	Hol.	Gre.	Ita.	Irl.	Fra.	Din.	Bél.	Lux.	Al.	R.U.
ÍNDICE MORTALIDAD	7,4	8,2	8,7	9,4	9,4	10	10,8	11,1	11,3	11,6	11,8
MAYORES 64 AÑOS	11,3	11,6	13,2	13,6	10,7	15,4	14,5	14,4	13,5	15,3	15,3

8. De un muelle se cuelgan pesas y se obtienen los siguientes alargamientos:

x: MASA DE LA PESA (g)	0	10	30	60	90	120	150	200	250	350
y : ALARGAMIENTO	0	0,5	1	3	5	6,5	8	10,2	12,5	18

Halla la recta de regresión de Y sobre X y estima el alargamiento que se conseguirá con pesos de 100 g y de 500 g. ¿Cuál de las dos estimaciones es más fiable?

9. La siguiente tabla muestra el número de gérmenes patógenos por centímetro cúbico de un determinado cultivo según el tiempo transcurrido:

N º- DE HORAS	0	1	2	3	4	5
N º- DE GÉRMENES	20	26	33	41	47	53

a) Calcula la recta de regresión para predecir el número de gérmenes por cm^3 en función del tiempo.

b) ¿Qué cantidad de gérmenes por cm^3 es predecible encontrar cuando hayan transcurrido 6 horas? ¿Es buena esa predicción?

10. En un depósito cilíndrico, la altura del agua que contiene varía conforme pasa el tiempo según la siguiente tabla:

TIEMPO	8	22	27	33	50
ALTURA	17	14	12	11	6

a) Halla el coeficiente de correlación lineal entre el tiempo y la altura e interprétalo.

b) ¿Cuál será la altura del agua cuando hayan transcurrido 40 horas?

c) Cuando la altura del agua es de 2 m, suena una alarma. ¿Qué tiempo ha de pasar para que avise la alarma?

11. En una cofradía de pescadores, las capturas registradas de cierta variedad de pescados, en kilogramos, y el precio de subasta en lonja, en euros/kg, fueron los siguientes:

x (kg)	2 000	2 400	2 500	3 000	2 900	2 800	3 160
y (euros/kg)	1,80	1,68	1,65	1,32	1,44	1,50	1,20

a) ¿Cuál es el precio medio registrado?

b) Halla el coeficiente de correlación lineal e interprétalo.

c) Estima el precio que alcanzaría en lonja el kilo de esa especie si se pescasen 2600 kg.

12. Durante 10 días, hemos realizado mediciones sobre el consumo de un coche (litros consumidos y kilómetros recorridos). Los datos obtenidos han sido los siguientes:

x (km)	100	80	50	100	10	100	70	120	150	220
y (l)	6,5	6	3	6	1	7	5,5	7,5	10	15

a) Halla el coeficiente de correlación lineal y la recta de regresión de Y sobre X.

b) Queremos hacer un viaje de 190 km, ¿qué cantidad de combustible debemos poner?

13. En una zona de una ciudad se ha tomado una muestra para estudiar el número de habitaciones de que dispone un piso y el de personas que viven en él, obteniéndose estos datos:

Nº- DE HABITACIONES	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5
N º- DE PERSONAS	1	2	2	3	3	4	5	4	5	6

a) Representa la nube de puntos. b) Calcula e interpreta el coeficiente de correlación.

14. El consumo de energía “per cápita” en miles de kWh y la renta “per cápita” en miles de euros de seis países de la U.E. son las siguientes:

	ALEMANIA	BÉLGICA	DINAMARCA	ESPAÑA	FRANCIA	ITALIA
CONSUMO (y)	5,7	5,0	5,1	2,7	4,6	3,1
RENTA (x)	11,1	8,5	11,3	4,5	9,9	6,5

a) Calcula la recta de regresión del consumo de energía (y) sobre la renta (x).
b) Indica el coeficiente de correlación entre el consumo y la renta.
c) ¿Qué predicción podemos hacer sobre el consumo de energía "per cápita" de Grecia si su renta es de 4,4 miles de euros?

15. La siguiente tabla relaciona el número atómico de varios metales de la misma fila en el sistema periódico (periodo 4), con su densidad:

ELEMENTO	K	Ca	Ti	V	Mn	Fe	Co	Ni
NÚMERO ATÓMICO	19	20	22	23	25	26	27	28
DENSIDAD (g/cm^3)	0,86	1,54	4,5	5,6	7,11	7,88	8,7	8,8

Representa los puntos, calcula el coeficiente de correlación y halla la ecuación de la recta de regresión. A partir de ella, estima la densidad del cromo (Cr), cuyo número atómico es 24. Haz otro tanto con la del escandio (Sc), de número atómico 21.

16. La evolución del IPC (índice de precios al consumo) y de la tasa de inflación en 1987 fue:

	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO
IPC	0,7	1,1	1,7	2	1,9	1,9
TASA DE INFLACIÓN	6	6	6,3	6,2	5,8	4,9

a) Representa la nube de puntos.
b) Calcula el coeficiente de correlación entre el IPC y la tasa de inflación.
c) ¿Se puede estimar la tasa de inflación a partir del IPC?

17. La estatura media de 100 escolares de cierto curso de E.S.O. es de 155 cm con una desviación típica de 15,5 cm. La recta de regresión de la estatura respecto al peso es y = 80 + 1,5x (x: peso; y: estatura). a) ¿Cuál es el peso medio de esos escolares? b) ¿Cuál es el signo del coeficiente de correlación entre peso y estatura?

18. En una muestra de 64 familias se han estudiado el número de miembros en edad laboral, x, y el número de ellos que están en activo, y. Los resultados son los de la tabla. Calcula el coeficiente de correlación lineal entre ambas variables e interprétalo.

x \ y	1	2	3
1	6	0	0
2	10	2	0
3	12	5	1
4	16	8	4

19. Una compañía discográfica ha recopilado la siguiente información sobre el número de conciertos dados, durante el verano, por 15 grupos musicales y las ventas de discos de estos grupos (expresados en miles de CDs):

CDs (x) \ CONCIERTOS (y)	10 – 30	30 – 40	40 – 80
1 – 5	3	0	0
5 – 10	1	4	1
10 – 20	0	1	5

a) Calcula el número medio de CDs vendidos.
b) ¿Cuál es el coeficiente de correlación?
c) Obtén la recta de regresión de Y sobre X.
d) Si un grupo musical vende 18000 CDs, ¿qué número de conciertos se prevé que dé?

20. Hemos obtenido 10 medidas de las variables X e Y correspondientes a una distribución bidimensional. A partir de esos datos, conocemos:

$\Sigma x_i = 200$ $\Sigma y_i = 50$ $r = -0,75$

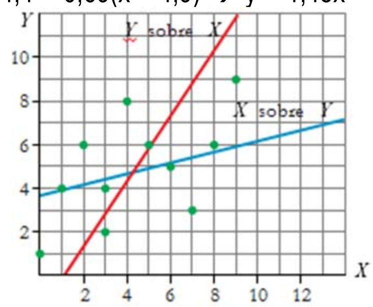
I. Una de las siguientes rectas es la de regresión de Y sobre X. Di cuál de ellas es, justificadamente:
a) y = – 4,5 + 2,5x b) y = 35 – 1,5x c) y = 9 – 0,7x e) y = –200 + 50x
II. Halla la recta de regresión de X sobre Y.

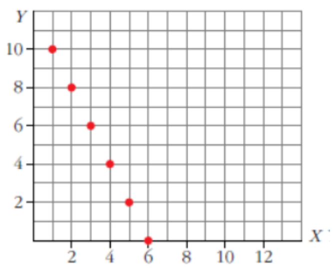
SOLUCIONES

1. Las variables que se relacionan están claras en todos los casos. El colectivo sobre el que se hace el estudio también está claro salvo, acaso, en los apartados d) y e), en qué es un grupo de casas (todas las de una barriada, una ciudad, un país…). Solo hay relación funcional en d), el resto son relaciones estadísticas. La correlación es positiva en a), d) y e), y es negativa en b) y c).

2. $\hat{y}$ (13) = 52,1; $\hat{y}$ (20) = 74,5;
$\hat{y}$ (30) = 106,5; $\hat{y}$ (100) = 330,5
Son fiables $\hat{y}$ (13) e $\hat{y}$ (20), porque 13 y 20 están en el intervalo de valores utilizados para obtener la recta de regresión.
$\hat{y}$ (30) es menos fiable, pues 30 está fuera del intervalo, aunque cerca de él.
$\hat{y}$ (100) es una estimación nada fiable, pues 100 está muy lejos del intervalo [12, 25].

3. $m_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = 0{,}48$
Recta de regresión de Y sobre X:
y = 4,9 + 0,48(x – 4,4) → y = 0,48x + 2,79
$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = 0{,}69$
Recta de regresión de X sobre Y:
y = 4,4 + 0,69(x – 4,9) → y = 1,45x – 1,48





4.
a) Los puntos están alineados todos ellos sobre la recta y = 12 – 2x. Por tanto, el coeficiente de correlación es –1: r = –1.
b) Las dos rectas de regresión son coincidentes. Su ecuación es y = 12 – 2x.
c) m_{yx} = –2 (pendiente de la recta de regresión de Y sobre X). m_{xy} = –1/2

5. r = 0,5

6. a) r = 0,8
b) y = 65 + 0,4 (x – 170) = 0,4x – 3 [x cm; y kg]
c) y (180) = 69 kg

7. r = 0,77. Hay una considerable relación entre las dos variables.

8. r = 0,999; y = – 0,01 + 0,051x
100 g → 5,09 cm
500 g → 25,49 cm (menos fiable).

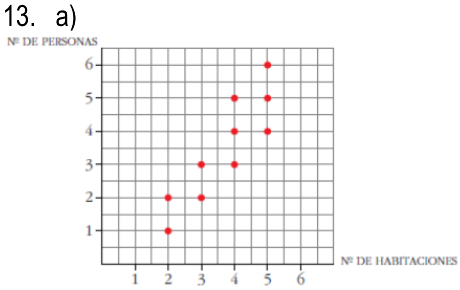
9. a) y = 19,81 + 6,74x, donde: x → número horas, y → número de gérmenes
b) $\hat{y}$ (6) = 60,25 ≈ 60 gérmenes. Es una buena predicción, puesto que r = 0,999 (y 6 está cercano al intervalo de valores considerado).

10. a) r = – 0,997. Hay una relación muy fuerte entre las dos variables, y negativa. A medida que pasa el tiempo, la altura va bajando (se va consumiendo el agua).
b) La recta de regresión es y = 19,37 – 0,26x, donde: x → tiempo, y → altura. $\hat{y}$ (40) = 8,97 m
c) 2 = 19,37 – 0,26x → x = 66,8 h

11. a) $\bar{y}$ = 1,51 euros
b) r = – 0,97. Relación fuerte y negativa. A mayor cantidad de pescado, menor precio/kilo.
c) Recta de regresión: y = 2,89 – 0,0005x
$\hat{y}$ (2600) = 1,59 euros

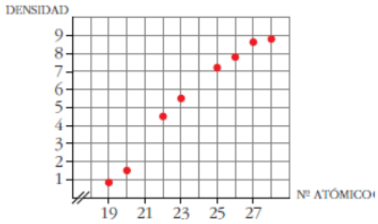
12. a) r = 0,99; y = 0,157 + 0,066x
b) $\hat{y}$ (190) = 12,697 litros. Debemos poner, como mínimo, unos 13 litros

13. a)

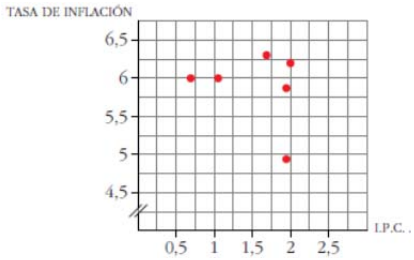


b) r = 0,88. Hay una correlación alta entre las dos variables.

14. a) y = 0,8 + 0,4x b) r = 0,93
c) $\hat{y}$ (4,4) = 2,56 kWh

15.


r = 0,98 $\hat{y}$ = –16,5 + 0,93x $\hat{y}$ (24) = 5,86
$\hat{y}$ (21) = 3,06 Las densidades del Cr y del Sc son, aproximadamente, 5,86 y 3,01.
(Los valores reales de estas densidades son 7,1 y 2,9.)

16.


r = – 0,24. La nube de puntos es muy dispersa. No se puede estimar de forma fiable la tasa de inflación a partir del IPC (pues |r| es muy bajo).

17. a) La recta de regresión es:
$y = \bar{y} + m(x - \bar{x}) = 155 + 1{,}5(x - \bar{x}) =$
$= 155 + 1{,}5x - 1{,}5\bar{x} = (155 - 1{,}5\bar{x}) + 1{,}5x =$
$= 80 + 1{,}5x \rightarrow 155 - 1{,}5\bar{x} = 80 \rightarrow \bar{x} = 50$ kg
b) Positivo (igual que el signo de la pendiente de la recta de regresión).

18. r = 0,31. La relación entre las variables es débil.

19. x → CDs; y → Conciertos
a) $\bar{x}$ = 9,6 ≈ 10 b) r = 0,814
c) y = 13,51 + 2,86x
d) $\hat{y}$ (18) = 64,99 ≈ 65 conciertos

20. I) $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{200}{10} = 20$ $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{50}{10} = 5$
La recta de regresión pasa por ($\bar{x}$, $\bar{y}$). Además, el signo de r coincide con el signo de la pendiente de la recta de regresión; luego es la b): y = 35 – 1,5x

II) $m_{yx} \cdot m_{xy} = r^2 \rightarrow m_{xy} = \frac{r^2}{m_{yx}}$.
La pendiente de la recta de regresión de X sobre Y es: $\frac{1}{m_{xy}} = \frac{m_{yx}}{r^2} = \frac{-1{,}5}{(-0{,}75)^2} = -2{,}67$
Luego la recta es:
y = 5 – 2,67(x – 20) = 58,4 – 2,67x

1. En una distribución binomial B (10; 0,4), halla P [x = 0], P [x = 3], P [x = 5], P [x = 10] y el valor de los parámetros μ y σ.

2. Lanzamos 7 monedas. Calcula las probabilidades de 3 caras, 5 caras y 6 caras. Halla los valores de μ y σ.

3. Calcula k para que f (x) = $\begin{cases} k & x \in [3,8] \\ 0 & x \notin [3,8] \end{cases}$ sea una función de densidad.
   Halla las probabilidades:
   a) P [4 < x < 6] b) P [2 < x ≤ 5] c) P [x = 6] d) P [5 < x ≤ 10]

4. Calcula m para que f (x) = $\begin{cases} mx & x \in [3,7] \\ 0 & x \notin [3,7] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades: a) P [3 < x < 5] b) P [5 ≤ x < 7] c) P [4 ≤ x ≤ 6] d) P [6 ≤ x < 11]

5. Halla la f. de distribución de la v. a. cuya f. de densidad es: f (x) = $\begin{cases} 1/5 & x \in [3,8] \\ 0 & x \notin [3,8] \end{cases}$

6. Halla la f. de distribución de la v. a. cuya f. de densidad es: f (x) = $\begin{cases} x/20 & x \in [3,7] \\ 0 & x \notin [3,7] \end{cases}$

7. Halla las siguientes probabilidades [z ∈ N(0, 1)]:
   a) P [z ≤ 0,84] b) P [z < 1,5] c) P [z < 2] d) P [z < 1,87]
   e) P [z < 2,35] f) P [z ≤ 0] g) P [z < 4] h) P [z = 1]
   i) P [z > 1,3] j) P [z < –1,3] k) P [z > –1,3] l) P [1,3 < z < 1,96]
   m) P [–1 ≤ z ≤ 1] n) P [–2 ≤ z ≤ 2] ñ) P [–3 ≤ z ≤ 3] o) P [–4 ≤ z ≤ 4]
   p) P [–1,96 < z < –1,3] q) P [–1,3 < z < 1,96] r) P [–1,96 < z < 1,96]

8. Di el valor de k en cada caso [z ∈ N(0, 1)]: a) P [z ≤ k] = 0,7019
   b) P [z < k] = 0,8997 c) P [z ≤ k] = 0,5040 d) P [z < k] = 0,7054

9. Di el valor aproximado de k en cada caso: a) P [z < k] = 0,9533; b) P [z ≤ k] = 0,62.

10. En una distribución N(173, 6), halla las siguientes probabilidades:
    a) P [x ≤ 173] b) P [x ≤ 180,5] c) P [x = 174] d) P [161 ≤ x ≤ 180,5]
    e) P [161≤□ x ≤ 170] f) P [174 ≤ x ≤ 180,5] g) P [x > 191] h) P [x < 155]

11. Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante aproximación a la normal correspondiente (en todas ellas, ten en cuenta el ajuste de media unidad que hay que hacer al pasar de una variable discreta a una continua).
    a) x ∈ B (100; 0,1). Calcula P [x = 10], P [x < 2] y P [5 < x < 15].
    b) x ∈ B (1000; 0,02). Calcula P [x > 30] y P [x < 80].
    c) x ∈ B (50; 0,9). Calcula P [x > 45] y P [x ≤ 30].

12. Completa la siguiente tabla de probabilidades y calcula sus parámetros:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3		0,1

13. Sacamos dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases (0, 1 ó 2). a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad? b) Calcula la media y la desviación típica.

14. Se lanzan tres monedas y se cuenta el número de caras obtenidas. Haz una tabla con las probabilidades, represéntala gráficamente y calcula la media y la desviación típica.

15. Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien 4 preguntas?
b) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?
c) Calcula la probabilidad de que conteste mal a todas las preguntas.

16. Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota su color y se devuelve a la urna. Si esta experiencia se repite 5 veces, calcula la probabilidad de obtener: a) Tres bolas rojas. b) Menos de tres rojas.
c) Más de tres rojas. d) Alguna roja.

17. La probabilidad de que un aparato de televisión, antes de revisarlo, sea defectuoso, es 0,2. Al revisar cinco aparatos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?
b) ¿Y la de que haya alguno defectuoso?

18. En un examen tipo test, la media fue 28 puntos y la desviación típica 10 puntos. Calcula la puntuación tipificada de los alumnos que obtuvieron:

a) 38 puntos. b) 14 puntos. c) 45 puntos. d) 10 puntos.

19. Si en el mismo examen del problema anterior la puntuación tipificada de un alumno fue 0,8, ¿cuántos puntos obtuvo? ¿Cuántos puntos corresponden a un valor tipificado de –0,2?

20. Las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,8 y –0,4 y sus notas reales fueron 88 y 64 puntos. ¿Cuál es la media y la desviación típica de las puntuaciones del examen?

21. La talla media de los 200 alumnos de un centro escolar es de 165 cm y la desviación típica, 10 cm. Si las tallas se distribuyen normalmente, calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida más de 180 cm. ¿Cuántos alumnos puede esperarse que midan más de 180 cm?

22. Los pesos de 2000 soldados presentan una distribución normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg. Calcula la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:

a) Más de 61 kg. b) Entre 63 y 69 kg. c) Menos de 70 kg. d) Más de 75 kg.

23. Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10. a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe? b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?

24. En una ciudad, las temperaturas máximas diarias durante el mes de julio se distribuyen normalmente con una media de 26°C y una desviación típica de 4 °C. ¿Cuántos días se puede esperar que tengan una temperatura máxima comprendida entre 22°C y 28°C?

25. Si lanzamos un dado mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenidos sea menor que 100?

26. Una moneda se lanza 400 veces. Calcula la probabilidad de que el número de caras: a) Sea mayor que 200. b) Esté entre 180 y 220.

SOLUCIONES

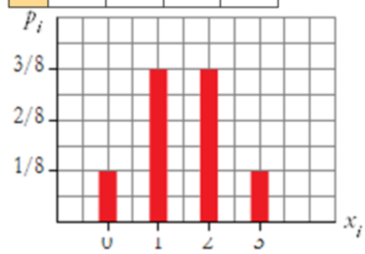
1. P [x = 3] = 0,215 P [x = 5] = 0,201
   P [x = 10] = 0,000105 $\mu = 4$ $\sigma = 1{,}55$
2. P [x = 3] ≅ 0,273 P [x = 5] =≅ 0,164
   P [x = 6] ≅ 0,0547 $\mu = 3{,}5$ $\sigma \cong 1{,}323$
3. k = 1/5; a) P [4<x<6] = 2/5
   b) P [2<x≤5] = 2/5 c) P [x=6]= 0
   d) P [5<x≤10] = 3/5
4. m=1/20; a) P[3<x<5]=2/5
   b) P[5≤x<7] = 3/5 c) P[4≤x≤6] = ½
   d) P[6≤x<11] = 13/40
5. F(x) = $\begin{cases} \frac{x-3}{5} & si\ 3 \le x \le 8 \\ 1 & si\ x \ge 8 \end{cases}$
6. F(x) = $\begin{cases} 0 & si\ x \le 3 \\ \frac{x^2-9}{40} & si\ 3 < x < 7 \\ 1 & si\ x \ge 7 \end{cases}$
7. Mirando directamente en la tabla:
   a) 0,7996 b) 0,9332 c) 0,9772
   d) 0,9693 e) 0,9906 f) 0,5000
   g) 1 h) 0
   i) 1 – p(z < 1,3) =0,0968 j) 0,0968
   k) 0,9032 l) 0,0718
   m) 2p(z ≤ 1) – 0,5 = 0,6826 n) 0,9544
   ñ) 0,9974 o) 1 p) 0,0718
   q) 0,8782 r) 0,9500
8. a) k=0,53; b) k=1,28; c) k=0,01; d) k=0,54
9. a) k ≅ 1,68 b) k ≅ 0,305
10. a) 0,5 b) 0,1056 c) 0,3269
    d) 0,8716 e) 0,2857 f) 0
    g) 0,0013 h) 0,0013
11. a) p(x=10)=0,135; p(x<2)=0,0023; p(5<x< 15)=0,8664
    b) p(x > 30) = 0,0089; p(x < 80) = 1
    c) p(x > 45) = 0,4052; p(x ≤ 30) = 0
12. p(2) = 0,5 $\mu = 1{,}6$ $\sigma = 0{,}8$
13. a)

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}$	$2\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{36}{39}$	$\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}$

b) $\mu = 0{,}2$; $\sigma = 0{,}42$

14.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



$\mu = 1{,}5$; $\sigma = 0{,}87$

15. a) p(x=4)=0,146; b) p(x>2)=0,474; c) p(x=0)=0,056
16. a) p(x = 3) = 0,1323; b) p(x < 3) ≅ 0,8369;
    c) p(x > 3) = 0,0308; d) p(x ≠ 0) = 0,83193
17. a) p(x = 0) = 0,328 b) p(x ≠ 0) = 0,672
18. a) $\frac{38-28}{10} = 1$ b) $\frac{14-28}{10} = -1{,}4$
    c)) $\frac{45-28}{10} = 1{,}7$ d) $\frac{10-28}{10} = -1{,}8$
19. 0,8 → 0,8 • 10 + 28 = 36
    – 0,2 → – 0,2 • 10 + 28 = 26
20. $\mu = 72$; $\sigma = 20$
21. P [x > 180] = 0,0668; ≈ 13 alumnos
22. a) P [x > 61] = 0,6915;
    b) P[63 <x < 69] = 0,2902;
    c) P[x < 70] = 0,7357
    d) P[x > 75] = 0,1056
23. a) P [x ≥ 50] = 0,6915
    b) ≈ 277 alumnos
24. P [22 < x < 28] = 0,5328 → ≅ 17 días
25. p(x<1000) = 0
26. a) p(x > 200) = 0,4801
    b) p(180 < x < 220) = 0,9488