MATEMÁTICAS I

EJERCICIOS DE REFUERZO

PARTE 1: ÁLGEBRA

PARTE 2: TRIGONOMETRÍA

PARTE 3: GEOMETRÍA ANALÍTICA

PARTE 4: FUNCIONES

PARTE 5: CONTINUIDAD - DERIVADAS

PARTE 6: ESTADÍSTICA - PROBABILIDAD

1. Calcula los siguientes logaritmos:

   a) $\log_2 32$ b) $\log_{32} 2$ c) $\log_2 \frac{\sqrt[3]{2}}{8}$ d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}$ e) $\log_{1/4} \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

   f) $\log_{1/4}(-2)$ g) $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ h) $\log_{\sqrt{2}/2} \sqrt[4]{2}$ i) $\log_2(\log_2 2)$ j) $\log_2 3^{\log_3 2}$

2. Calcula las bases de los siguientes logaritmos:

   a) $\log_b 3 = ½$ b) $\log_b 3 = -2$ c) $\log_b (1/81) = 1/8$ d) $\log_b \sqrt[3]{3} = 2/3$

3. Calcula las siguientes potencias: a) $2^{\log_2 3}$ b) $2^{\log_4 3}$
4. Calcula el número x: a) $\log_{1/8} x = 1/3$ b) $\log_{\sqrt[3]{4}} x = -3$
5. Sabiendo que log2 = 0,301030, calcula sin utilizar calculadora los siguientes logaritmos:

   a) log 2000 b) $\log \sqrt[5]{8}$ c) log 0,125 d) $\log (0{,}64^3 \cdot \sqrt[3]{0.32})$

6. Calcula el valor de x en los siguientes casos:

   a) $x = \log_3 81$ b) $x = \log_{81} 3$ c) $x = 7^{\log_7 3}$ d) $\log_x 7 = -2$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{x^2-2x} = 1$ b) $2^{3x-1} = \sqrt[4]{2}$ c) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 39$ d) $3^x + 3^{2-x} = 10$

e) $9^x - 6\cdot 3^{x+1} + 81 = 0$ f) $e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$ g) $4^x - 2^x = 2$ h) $2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$

i) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^x = 255$ j) $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + \ldots\ldots + 2^x = \frac{127}{8}$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log 7 = \log x + \log 3$ b) $\log_7 \frac{x}{5} + \log_7 5 = 2$ c) $\log(x+1) - \log x = 1$

d) $\log(3x+5) - \log(2x+1) = 1 - \log 5$ e) $2\log x - \log(x+6) = 0$ f) $3\log x - \log(2x^2 + x - 2) = 0$

g) $\log(2x-3) - \log(x+1) = \log(2x-5) - \log(1-x)$ h) $4\log x - \log(x^2 - \frac{4}{5}) = \log 5$

9. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ \frac{x}{y} = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 9 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 5 \\ 3\log x + \log y = 2 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x-1} + 5^{y+1} = 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \log_x(4-x) = 1/2 \\ \log_y(4+x) = 2 \end{cases}$

10. Calcula el valor de y sabiendo que $\log_2(x)\cdot\log_x(2x)\cdot\log_{2x}(y) = 2$
11. Halla las raíces de los siguientes polinomios y descomponlos en factores:

    a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ c) $x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4$

    b) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$ d) $x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

12. Descompón en suma de fracciones con denominadores binómicos de primer grado:

    a) $\frac{4}{x^2 - 5x + 6}$ b) $\frac{2x^2 + x - 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

13. Descompón la fracción $\frac{2x+3}{(x-2)^2}$ como suma de dos fracciones con numeradores numéricos.
14. Resuelve las ecuaciones siguientes:

    a) $6x^2 + x - 1 = 0$ c) $(x + 2)^2 - ½ (x + 1) = 18$ e) $2x^2 - \sqrt{2}\,x - 2 = 0$

    b) $2x^2 + 1 = 4x$ d) $1 - \frac{1+x}{2} = \frac{1}{4} - x - \frac{x^2 - 1}{2}$ f) $2\sqrt{3}\,x^2 - x - \sqrt{3} = 0$

15. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 421. Hállalos.
16. Halla dos números impares consecutivos cuyo producto es 323.

17. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
   b) $x^4 - 4x^2 - 32 = 0$
   c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
   d) $x^6 - 35x^3 + 216 = 0$
   e) $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$
   f) $x^3 + 3x^2 + 4x = 0$
   g) $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$
   h) $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x = 0$
18. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $\dfrac{3x-1}{x-2} + \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{3x^2}{x^2-4}$
   b) $\dfrac{3}{2x^2-3x} = \dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{5}{x}$
   c) $\dfrac{2x+1}{x^2-2} = \dfrac{3}{x+4}$
   d) $\dfrac{1}{(2x-3)^3} + \dfrac{2}{2x-3} = 15$
   e) $\dfrac{2x-3}{x+1} = \dfrac{2x-5}{1-x^2}$
   f) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3}{x+2}$
19. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $x = 1 + \sqrt{25 - x^2}$
   b) $\sqrt{4x+8} + 1 = x$
   c) $2\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+1} = 2$
   d) $\sqrt{5x-1} = 1 + \sqrt{x}$
   e) $\sqrt{6x+7} - \sqrt{3x+3} = 1$
   f) $\dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} = 3$
20. Resuelve las siguientes inecuaciones:
   a) $2x - 8 \leq 7x + 12$
   b) $5x - ¾ < ½ - 2x$
   c) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} < 1 - \dfrac{x-1}{4}$
   d) $5 + \dfrac{1-5x}{3} - \dfrac{1+3x}{2} > 0$
   e) $2x - y + 3 \geq 0$
   f) $3x - 2y + 2 < 3$
   g) $\dfrac{x-2y}{3} \leq y$
   h) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} > 1 - \dfrac{x+y}{2}$
   i) $\dfrac{2x+8}{3x-9} > 0$
   j) $\dfrac{x+3}{x-2} \leq 2$
   k) $\dfrac{x+2}{3x-1} \leq 0$
   l) $\dfrac{x-2}{x+1} < \dfrac{1}{4}$

21. Resuelve las siguientes inecuaciones:
   a) $x^2 - 4x - 5 > 0$
   b) $x^2 + 4x + 5 \leq 0$
   c) $2x^2 - 3x + 1 > 0$
   d) $3x^2 + 2x + 2 < 2x^2 + x + 4$
   e) $\dfrac{x^2+x}{x^2-3x+2} > 0$
   f) $(x-2)^2 \cdot (x-5) \geq 0$
   g) $\dfrac{x-4}{(x-2)(x-3)} < 0$
   h) $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 < 0$
22. Reparte 564 € entre dos personas, de modo que la primera sólo reciba monedas de 1 €, la segunda sólo reciba billetes de 5 € y ambas reciban la misma cantidad de piezas.
23. El número que indicará la edad de un niño dentro de 3 años será un cuadrado perfecto, y hace 3 años su edad era precisamente la raíz cuadrada de este número. ¿Qué edad tiene el niño actualmente?
24. Calcula el perímetro de un rombo, sabiendo que el área es de 1920 cm² y una diagonal mide 96 cm.
25. Un cacharrero compró cierto número de botijos por 37 €, se le rompen 3 y vende cada uno de los restantes en 50 cts más de lo que le había costado, ganando así un total de 9,80 €. ¿Cuántos botijos compró?
26. Un padre quiere dejar a sus hijos fortunas proporcionales a sus edades. Al mayor le deja 3,9 millones y 600 acciones, mientras que al menor le deja 200 acciones y 5,7 millones. Calcula el valor de cada acción, sabiendo que las edades respectivas de sus hijos son 7 y 9 años.
27. Una vasija llena de agua pesa 14 Kgs. Si quitáramos el 75% del agua que contiene sólo pesaría 5 Kgs. Calcula el peso de la vasija vacía.

28. Un campo de 121 200 m² se divide en parcelas de dos tipos: de Hectómetro cuadrado y de Decámetro cuadrado de manera que hay el mismo número de parcelas de cada tipo. Se entregan todas las parcelas grandes a un gigante y todas las pequeñas a un enano, ¿cuántos m² recibe cada uno?
29. El número que indicaba la edad de un niño hace 7 años es tal que al elevarlo al cuadrado se obtiene la edad que tendrá dentro de 5 años. ¿Qué edad tiene el niño actualmente?
30. Calcula el área de un rombo sabiendo que el perímetro es de 104 cm y una diagonal mide 20 cm.
31. Un chaval quiere repartir caramelos entre sus amigos, pero calcula que para entregar 8 caramelos a cada uno le faltan 6 caramelos. Encuentra 6 caramelos más y al repartirlos observa que se han marchado 2 amigos, así que le tocan 9 caramelos a cada uno y todavía le sobra un caramelo. ¿Cuántos caramelos tenía al principio?
32. Un agricultor tiene dos jornaleros que ganan lo mismo. Por 50 días de trabajo paga a uno 2352 € y 4 garrafas de aceite. Por 68 días de trabajo paga al otro 3168 € y 8 garrafas de aceite. ¿Cuánto vale la garrafa de aceite?
33. Dos tubos llenan un barril en 12 minutos. Si una mitad del barril se llena primero por un tubo y la otra por el otro, el barril se llena en 25 minutos. ¿En cuántos minutos llena el barril cada uno de los tubos independientemente?
34. Un tonel lleno de vino pesa 125 Kgs. Si quitamos 1/3 del vino que contiene sólo pesa 95 Kgs. Calcula el peso del tonel vacío.
35. Un grupo de amigos cenan juntos, y a la hora de pagar la cuenta resulta que tres de ellos no tienen dinero, por lo que cada uno de los restantes debe pagar 3,64 € más de los que correspondía. Sabiendo que la cuenta ascendía a 327,60 €, calcula el número total de amigos que han cenado.
36. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos observó que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas fueron a la reunión?
37. Dos trenes salen al mismo tiempo de los puntos A y B, la distancia entre los cuales es igual a 45 km. Los trenes se encuentran a los 20 min. El tren que salió de A llega a B 9 min. antes que el otro a A. Hallar las velocidades de los trenes.
38. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área es 24 m².
39. Resuelve los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} x+y-z=9 \\ x-y-z=1 \\ x-y+z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y+z=3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x-5y+z=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 2x+y=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+3z=-1 \\ 3x-2y+4z=2 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+2y-2z=11 \\ 3y-2z=4 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+z=0 \\ 3y+z=2 \\ x+3y+z=1 \end{cases}$

40. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x^2+y^2=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ xy+y^2=5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^2+xy=30 \\ xy+y^2=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x^2-2y^2-2=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-y=4 \\ x^3-y^3=28 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2+xy=77 \\ y^2+xy=44 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+y=11 \\ 2x^2+y^2=22 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x^2+3xy=0 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

41. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x-2\geq 10 \\ 2x-3\leq x/2+3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2-3(x+1)<4 \\ \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x-1}{3}\leq 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 12/5 < 3 \\ x \le \dfrac{4-2x}{5} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y \ge 0 \\ x + y \le 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} y \ge x^2 \\ y < 4 \\ x > 1 \end{cases}$

42. Calcular el número de litros de una solución de alcohol al 60% que se deben añadir a 40 litros de otra solución de alcohol al 20% para obtener una mezcla al 30%. Los porcentajes son en volumen.
43. Se dispone de 60 litros de una solución de glicerina y agua al 50%. Hallar el volumen de agua que se debe añadir para reducir la concentración de glicerina al 12%. Los porcentajes son en volumen.
44. 8.- Un lingote de oro de 0,950 de ley pesa 960 gramos. Se quiere fabricar con él un objeto, pero el artífice reemplaza parte del primer lingote por otro de 0,800 de ley, con lo que resulta que el objeto tiene 0,900 de ley. ¿Cuánto pesaba la parte reemplazada?
45. Se mezcla 30 kg de una cierta sustancia de 3 €/kg con otras dos sustancias cuyos precios son 5 y 6 €/kg y resulta el precio medio a 4,90 €. Calcular las cantidades que han de entrar en la mezcla de estas dos últimas sustancias, con la condición de que han de entrar de la tercera tantos kilogramos como kilogramos entran de las otras dos juntas.
46. Se desea obtener 36 kg de oro de 0,825 de ley, para lo que se dispone de dos lingotes de leyes 0,700 y 0,850, respectivamente. ¿Qué cantidad debemos tomar de cada uno de ellos?
47. Una persona tiene una bañera cuya capacidad es de 490 litros. Para que la bañera esté llena cuando la persona queda sumergida, es preciso echar 24 cubos de agua. Si la persona tuviese doble volumen, harían falta 4 cubos menos de agua. ¿Cuál es el volumen, en dm^3, de esa persona, y cuál la capacidad, en litros, del cubo?
48. En un triángulo que tiene 15 m de base y 10 de altura, se inscribe un cuadrado. Hallar su lado.
49. La entrada a una piscina le cuesta el doble a una persona mayor que a un niño. Una familia, compuesta por los padres y tres niños han pagado en total 14 €. Averiguar el precio de la entrada para una persona mayor y para un niño.
50. Las bases de un trapecio miden 25 y 15 m, respectivamente. Hallar la altura del triángulo que se forma prolongando los lados no paralelos del trapecio, sabiendo que éste mide 10 m de altura.
51. La suma de las dos cifras de un número es 13; dicho número disminuye en 27 cuando se invierte el orden de sus cifras. Hallar el número.
52. Dos grifos llenan un depósito en 10 y 15 minutos, respectivamente. Los dos grifos anteriores y un tercero, actuando todos simultáneamente, llenan el depósito en cuatro minutos. Hallar el tiempo que tardaría en llenarse el depósito empleando sólo el tercer grifo.
53. Dos segundos después de oír el disparo de su fusil, un soldado oye el impacto de la bala en el blanco. Si las velocidades del sonido y de la bala son de 340 m/s y 510 m/s respectivamente, hallar la distancia al blanco.
54. Escribe el radical $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ como suma de dos radicales simples $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
55. Halla p para que las raíces de la ecuación $4x^2 + 4px + 9 = 0$ se diferencien en 4 unidades.
56. Un club de jubilados quiere organizar un viaje para 200 socios. Contratan una agencia que dispone de 4 microbuses de 25 plazas y 5 autobuses de 50 plazas, pero sólo dispone de 6 conductores. El alquiler de los autobuses es de 192 € por día y el de los microbuses, 84 €. En estas condiciones, ¿cómo deben hacer para que el costo del viaje sea el menor posible? Razona la respuesta.
57. Dos complejos vitamínicos v_1 y v_2 están formados por los compuestos A, B y C. La fórmula del primero presenta 2 cg de A, 2 cg de B y 1 cg de C. La del segundo, 1 cg de A, 2 cg de B y 2 cg de C: v_1 tiene un precio de venta al público de 1,44 € y v_2 de 1,80 €. Si la prescripción médica indica que el mínimo por ingerir en el tratamiento es de 8 cg de A, 10 cg de B y 6 cg de C, ¿qué tratamiento a base de ambos complejos resulta más económico?
58. Se han comprado cucharas, tenedores y cuchillos. Entre cucharas y tenedores no llegan a 6; el número de tenedores es mayor que el de cuchillos, y el número de cucharas es mayor que el de cuchillos aumentado en 1. ¿Cuántas piezas de cada clase se han comprado?
59. Un matrimonio dispone de 32 € para ir al teatro con sus hijos. Si compra entradas de a 5 €, les falta dinero, y si las compra de a 4 €, les sobra. ¿Cuántos son los hijos?
60. Hallar un número entero de dos cifras, sabiendo que éstas suman 12; que si al número se suman 10 unidades, resulta menor que el doble del número que se obtiene de invertir el orden de sus cifras, y que la raíz cuadrada del número es mayor que 9.

1. a) 5; b) 1/5; c) –8/3; d) –8; e) 1/3; f) No existe; g) –4/3; h) –1/2; i) 0: j) 1.

2. a) 9;b) $\sqrt{3}$/3; c)1/(3^{32}); d) $\sqrt{3}$.

3. a) 3; b) $\sqrt{3}$.

4. a) ½; b) ¼

5. a) log2000 = log2 + log1000 = 3,301030; b) log $\sqrt[5]{8}$ = (3log2)/5 = 0,180618; c) log0,125 = –3log2 = –0.903090; d) log (0,64^3·$\sqrt[3]{0.32}$) = 1/3(59log2 – 20) = –0,746410

6. a) 4 b) ¼ c) 3 d) 1//7

7. a) 0; 2 b) 5/12 c) 2 d)0; 2 e) 2 f) 0; Ln2 g) 1 h) 1 i) 7 j) 3

8. a) 7/3 b) 49 c) 1/9 d) 3 e) 3 f) 1; 2 g) No tiene solución real h) 1; 2

9. a) (5/2, /2) b) (10, 1) c) (100, 0) d) (10, 1/10) e) (5, 2) f) (3, 0) g) (3, 1) h) (9/4, 5/2)

10. y = 4

11. a) (x – 2)(x +2)(x + 3) b) 2(x – 1)(x + 1)(x + 2)(x – 3/2) c) $(x-1)^3(x-2)^2$ d) $(x+1)^3(x^2+4)$

12. a) $\dfrac{-4}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}$ b) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$

13. $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{7}{(x-2)^2}$

14. a) 1/3; –1/2 b) 1±$\sqrt{2}$/2 c) (–7±$\sqrt{281}$)/4 d) (–1±$\sqrt{3}$)/2 e) $\sqrt{2}$;– $\sqrt{2}$/2 f) $\sqrt{3}$/2; –$\sqrt{3}$/3

15. 14 y 15 (–15 y –14)

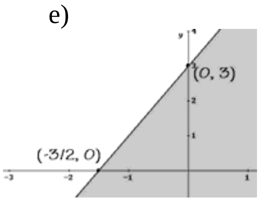
16. 17 y 19 (–19 y –17)

17. a) x = ±2; x = ±$\sqrt{3}$ b) x = ±2$\sqrt{2}$; x = ±2i∉R c) x = ±2i∉R; x ± 3i ∉R d) x = 2; x = 3; x = –1 ± $\sqrt{3}$i∉R; x = (–1±$\sqrt{3}$i)/2∉R e) x= –1; x = –2; x = 4 f)x=0;x=(–3±$\sqrt{7}$ i)/2∉R g) x = 1; x = –1 doble; x = ±i∉R h) x = 0; x = 1; x = 2; x = 3; x = 4

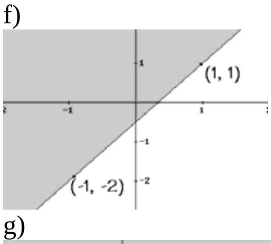
18. a) x = 6/7 b) x = 4/3 c) x = –1; x = 10 d) x = 5/3; x = 7/5 e) x = 2; x = –1/2 f) x = 1; x = $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

19. a) x = 4 (x= –3 No) b) x= 7 (x= –1 No) c) x = 5; x = 21 d) x = 1 (x= ¼ No) e) x = 1/3; x = –1 f) x = 5/3 (x = –5/3 No vale)

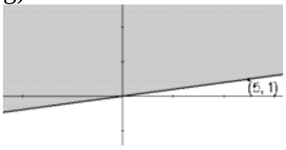
20. a) x∈[–4, +∞) b) x∈ (–∞, 5/28) c) x∈ (–∞, 2) d) x∈ (–∞, 29/19) e)



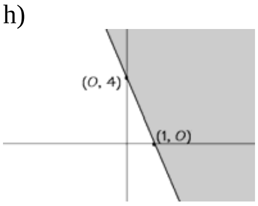
f)



g)



h)



i) x∈(–∞, –4)∪(3, +∞) j) x∈(–∞, 2)∪[7, +∞) k) x∈[–2, 1/3) l) x∈(–1, 3)

21. a) x∈(–∞,1)∪(5, +∞) b) NO ∃ solución c)x∈(–∞, 1/2)∪(1, +∞) d) x∈(–2, 1) e) x∈(–∞,–1)∪(0,1)∪(2,+∞) f) x∈[5, +∞) g) x∈(–∞, –2)∪(3, 4) h) x∈(–∞, –5)∪(1, 2)

22. 24 piezas cada uno

23. 6 años

24. 3840 cm.

25. 30 botijos

26. 0,01 millones

27. 2 kg.

28. 12 parcelas de cada

29. 11 años

30. 480 cm^2.

31. 190 caramelos

32. 12 €

33. 20 y 30 minutos

34. 35 kg.

35. 18 amigos

36. 12 personas

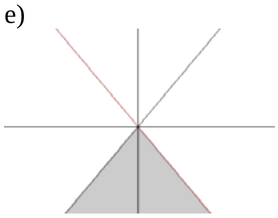
37. 75 Km/h y 60 Km/h

38. 6m, 8m y 10m.

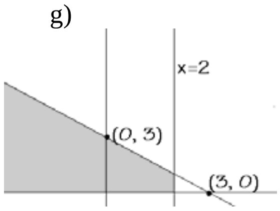
39. a) (x, y, z)= (3, 4, –2) b) (x, y, z) =(–5+9k, k, 8–13k) c) (x, y, z) = (1, k, –k) d) S. Incompatible e) (x, y, z) = (2, 0, –1) f) (x, y, z) = (3, 2, 1) g) (x, y, z) = (–1, 0, 2)

40. a) (x, y) = (–1, 1); (x, y) = (11/9, –1/9) b) (x, y) = (10/7, 1/7); (x, y) = (–2, –1) c) (x, y) = (4, 3) d) (x, y) = (–4, 5); (x, y) = (1/2, 2) e) (x, y) = (±1/3, ±½) f) (x, y) = (±$\sqrt{11}$, 0); (x, y) = (±3, 2) g) (x, y) = (±5, ±1 i) (x, y) = (±7, ±4)

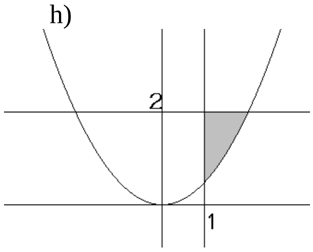
41. a) x = 4 b) x∈(–∞, 4/7] d) x∈(-5/3, 1] e)



g)



h)



42. $\frac{40}{3}$ litros=13$\frac{1}{3}$ litros

43. 190 litros

44. 320 g

45. 20 Kg y 50 Kg

46. 6 Kg (0,700) y 30 Kg (0,850)

47. 17.5 litros (cubo) y 70 dm^3 (persona)

48. 6 m

49. 2 € (niños) y 4 € (adultos)

50. 25 m

51. 85

52. 12 min.

53. 12 y 6 m.

54. $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

55. p = –5; p = 5

56. 4 microbuses y 2 autobuses

57. 4 dosis de v_1 y 1 de v_2

58. 3 cucharas, 2 tenedores y 1 cuchillo.

59. 5 hijos

60. 84

TRIGONOMETRÍA

1. Simplificar las expresiones siguientes:
 a) $3\text{sen}(\pi - \alpha) + 2\cos(\pi/2 + \alpha) - 5\text{sen}(\pi + \alpha)$ b) $3\text{tg}(3\pi/2 + \alpha) - \cot(\pi - \alpha) - 2\cot(-\pi)$
 c) $(x-y)\text{tg}(\pi/2 - \alpha) + 2(x+3y)\cot(\pi - \alpha) - 5x\text{tg}(3\pi/2 + \alpha)$ d) $a^2\text{sen}(\pi/2 - \alpha) + 2ab\cos(\pi + \alpha) - b^2\text{sen}(3\pi/2 + \alpha)$
2. Demostrar las siguientes identidades:
 a) $\text{cosec}^2x - \cot^2x = 1$ b) $\text{tg}x + \cot x = \sec x \cdot \text{cosec}x$
 c) $\text{sen}x + \cos x = \text{sen}^3x + \text{sen}^2x\cos x + \cos^2x\,\text{sen}x + \cos^3x$ d) $\text{sen}^2x - \cos^2y = \text{sen}^2y - \cos^2x$
 e) $\sec^2x + \text{cosec}^2x = \sec^2x \cdot \text{cosec}^2x$ f) $\sec^2x + \text{cosec}^2x = (\text{tg}x + \cot x)^2$
3. Demostrar que en un triángulo rectángulo ABC (A=90º) se verifica:
 a) $\text{sen}B \cdot \text{tg}B = b^2/ac$ b) $\text{sen}2B = 2bc/a^2$ c) $(\text{sen}B + \cos C)/(\cos B + \text{sen}C) = \text{tg}B$
4. Hallar una fórmula para cos2A en la que sólo intervenga cosA.
5. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas obteniendo las soluciones positivas que estén en el intervalo [0º, 360º), { $[0, 2\pi)$ } (Expresar el resultado en grados y en radianes):

1. $\sec x = 2$	2. $\text{cosec}x = -3$	3. $\text{sen}2x - \text{tg}x = 0$
4. $1 + \cos x = \text{sen}x$	5. $\text{sen}x = -\text{sen}x \cdot \text{tg}x$	6. $\cos x = \cot x$
7. $2\text{sen}^3x - \text{sen}x = 0$	8. $\cot x = 2\cos x$	9. $\text{sen}3x - \text{sen}x = \text{sen}x$
10. $2\cos^2x = 1$	11. $\cos^2x - \text{sen}^2x = 1/2$	12. $3\text{tg}x - 2\cot x = 1$
13. $5\sec x - 4\cos x = 8$	14. $\cos 2x = \text{sen}x$	15. $\cos 2x + \text{sen}x = 1$
16. $\text{sen}x + \cos 2x = 4\text{sen}^2x$	17. $\text{tg}2x = \cot x$	18. $\text{sen}x + \text{cosec}x = 5/2$
19. $1 + 2\text{tg}x = 3\text{tg}^2x$	20. $4\cos 2x + 3\cos x = 1$	21. $\cos x - \text{sen}x = \cos 3x$
22. $3\cot x = 4 - \text{tg}x$	23. $\text{sen}5x = \cos 10x$	24. $\cos 2x + \cos x = 0$
25. $\text{sen}^2x = 7\cos^2x - 5$	26. $\text{tg}2x = -\text{tg}x$	27. $\text{tg}x + 4\cot x = 5$

6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} \text{sen}\,x + \text{sen}\,y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \text{sen}(x-y) = 1/2 \\ \cos(x+y) = 1/2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \text{tg}\,x + \text{tg}\,y = 2 \\ 2\cos x \cdot \cos y = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \text{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \\ 4\,\text{sen}\,x \cdot \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \text{sen}\,x + \cos y = 1/2 \\ \text{cosec}\,x + \sec y = -1 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x + y = 2\pi/3 \\ 2\text{sen}x \cdot \text{sen}y = 1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

7. Resolver los siguientes triángulos sabiendo que son rectángulos en A:

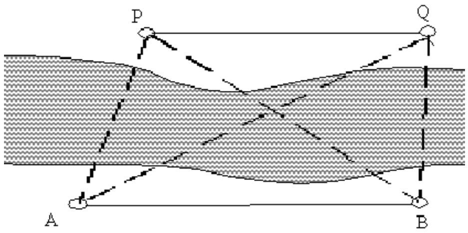
a) a = 320 m; B = 47º32'	b) b = 32,8 m; B = 22º27'	c) a = 42,5 m; b = 35,8 m
d) b = 8 m; c = 6 m	e) a = 13 m; c = 5 m	f) c = 42,7 m; C = 31º14'
g) c = 124 cm; B = 67º21'	h) a = 12,65cm; C = 48º10'	i) b = 3 m, c = 4 m

8. Los lados de un paralelogramo miden 4 cm y 6,5 cm, y comprenden un ángulo cuya tangente es 0,65. Calcular el área del paralelogramo.
9. Hallar la longitud de la base de un triángulo isósceles cuya altura mide 3,4142 dm, siendo el ángulo opuesto a la base de 30º.
10. Calcular la longitud del lado y de la apotema de los polígonos regulares siguientes:
 a) Octógono inscrito en una circunferencia de radio 49 cm
 b) Triángulo “ “ “ “ 38 cm
 c) Pentágono “ “ “ “ 125 cm
 d) Heptágono “ “ “ “ 48 cm
 e) Dodecágono “ “ “ “ 365 cm
11. Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, este ángulo se hace de 601. Hallar la altura de la torre.
12. Para medir la altura de una torre se hacen observaciones desde dos puntos A y B alineados con el pie de la torre, y en el mismo plano horizontal. Desde A se ve la torre bajo un ángulo de 72º y desde B bajo un ángulo de 28º45'. La distancia AB es de 30 m. Hallar la altura de la torre.
13. Calcular el área de un triángulo del que se conocen a = 8 m; b = 9 m y C = 27º
14. Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, siendo el cateto b = 75 cm y la bisectriz del ángulo C, 94 cm.
15. Dos calles de la misma anchura (2,40 m) se cortan bajo un ángulo de 40º15' formando un rombo en el cruce. Calcular el lado y el área de dicho rombo.
16. Calcular el área de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia de 4 cm de radio.
17. Dos circunferencias coplanarias de radios respectivos 4 cm y 6 cm, tienen sus centros distantes 12 cm. Calcular la inclinación sobre la línea de los centros: 1º de una tangente común exterior; 2º de una tangente común interior.
18. Dos individuos A y B observan un globo cautivo que está situado en un plano vertical que pasa por ellos. La distancia entre los individuos es de 4 Km. Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son 46º y 52º, respectivamente. Hallar la altura del globo y su distancia a cada observador.

19. Dos puntos en el suelo, A y B, distan 500 m. Las visuales dirigidas desde A y B al extremo del asta de una bandera forman con la recta AB ángulos de 112º y 63º, respectivamente. ¿A qué distancia de A se encuentra el extremo del asta?
20. Se desea saber la altura de un árbol situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del árbol desde un cierto punto forma un ángulo de elevación de 17º. Aproximándose 25’8 m hacia la orilla en la dirección del árbol, el ángulo es de 31º. Calcular la altura del árbol.
21. Un árbol de 8 metros de altura se quiebra por una fisura a 3 m sobre el suelo, y sin desprenderse del todo por la rotura, cae al suelo. ¿A qué distancia de la base toca el punto más alto de la copa en el suelo?
22. Hallar el área de un triángulo rectángulo tal que el radio de la circunferencia inscrita mide 8 cm y uno de los ángulos satisface la ecuación $2 sen x cos x = tg x$.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

23. Resolver los triángulos definidos por los siguientes elementos:
a) b = 0,609 m; c = 1,537 m; A = 11º59' b) a = 15,2 cm; b = 20,75 cm; C = 63º20'
c) a = 0,291 m; b = 0,353 m; c = 0.264 m d) a = 1235 m; b = 307 m; c = 1500 m
24. Dos fuerzas de 14,5 N y 23,1 N dan una resultante de 10,5 N. ¿Qué ángulos forman entre sí, y cada una de ellas con la resultante?
25. Se pretende hallar la distancia **PQ** de la figura, suponiendo que nuestros puntos de observación son A y B. Para ello:
1ºHallar la distancia PB, suponiendo que AB = 120,6 m; PAB = 82º10'; PBA = 57º40'.
2º Hallar la distancia PQ suponiendo que el ángulo QAB mide 42º35' y el QBA, 115º14'.



26. Desde un aeroplano volando en línea recta entre los puntos A y B, que distan entre sí 3250 m se ven dichos puntos con ángulos de depresión de 48º20' y 36º40' respectivamente. Calcular las distancias oblicua y horizontal del aeroplano a cada punto y la altura de vuelo.
27. Desde dos puntos en línea recta con el pie de una torre se ve el extremo de ésta con ángulos de elevación de 36º30' y 23º15'. Si la distancia entre estos puntos es de 35 m, hallar la altura de la torre.
28. Un aeroplano parte de un lugar a las nueve de la mañana a una velocidad de 250 Km/h y rumbo NE. Otro parte del mismo lugar media hora más tarde con velocidad de 300 Km/h y rumbo SSO. ¿A qué distancia se hallan a las diez?
29. Un avión se mueve con rumbo N y velocidad de 200 Km/h en una masa de aire que tiene una velocidad de 10 m/s en dirección SO. Calcular la velocidad y rumbo del avión respecto de la tierra.
30. Desde un automóvil en marcha por una carretera rectilínea en dirección NO se ven en un momento dado dos caseríos alineados con el coche en dirección N15ºE. Después de dos kilómetros de marcha se ve el primer caserío exactamente al este y el segundo al NE del coche. Calcular la distancia entre ambos caseríos.
31. A una distancia de 89 m del pie de una torre metálica de 51,60 m de altura se ve la torre bajo un ángulo de 23º27'. Calcular el desnivel entre el punto de observación y el pie de la torre.
32. Calcular el área de un triángulo dados a = 8 m, B = 30º y C = 45º.
33. En un paralelogramo ABCD, el lado AB mide 6 cm y AD 8 cm, y el ángulo A, 30º. Hallar la longitud de las diagonales.
34. Un buque navega en dirección NE a 10 millas por hora. Un submarino situado 50 millas al oeste inicia su persecución a 20 nudos. Calcular el rumbo que debe tomar el submarino y el tiempo que tardará en dar alcance al buque.
35. Hallar el área comprendida entre dos cuerdas paralelas de 3 m y 4 m en una circunferencia de 5 m de diámetro.
36. Un barco A pide socorro y las señales son recibidas por dos estaciones de radio B y C que distan entre sí 80 Km. La recta que une B y C forma con la dirección norte un ángulo de 48º. B recibe señales con una dirección 135º con el norte, mientras que C las recibe con una dirección de 96º con el N. ¿De cuál de las dos estaciones está más cerca el barco?
37. Se quiere construir un túnel a través de una montaña desde A hasta B. Un punto C que es visible desde A y B se encuentra a 384,8 m de A y 555,6 m de B. ¿Cuál es la longitud del túnel si el ángulo de lados AC y BC mide 35º42'?
38. Tres círculos de 2,03 cm, 5,00 cm y 8,20 cm de radio son tangentes entre sí. Encontrar los valores de los tres ángulos que forman las rectas que unen sus centros con error menor que 10´.

SOLUCIONARIO – TRIGONOMETRÍA

1. a) 6senα b) 0 c) (4x – 7y)cotα d) (a + b)²cosα

2. *[Diversos procedimientos]*

3. *[Diversos procedimientos]*

4. cos2A = 2cos²A-1

5. 1) 60º, 300º (π/3, 5π/3) 2) 199º28'; 340º32' (2.8, 5.94) 3)0º, 45º, 135º, 180º, 225º, 315º (0, π/4, 3π/4, π, 5π/4, 7π/4) 4) 90º, 180º, 270º (π/2, π, 3π/2) 5) 0º, 45º, 180º, 225º (0, π/4, π, 5π/4) 6) 90º, 270º (π/2, 3π/2) 7) 0º, 45º, 135º, 180º, 225º, 315º (0, π/4, 3π/4, π, 5π/4, 7π/4) 8) 60º, 90º, 120º, 240º, 270º, 300º (π/3, π/2, 2π/3, 4π/3, 3π/2, 5π/3) 9) 0º, 30º, 150º, 180º, 210º, 330º (0, π/6, 5π/6, π, 7π/6, 11π/6) 10) 45º, 135º, 225º, 315º 11) 30º, 150º, 210º, 330º 12) 45º, 146º18'36", 225º, 326º18'36" 13) 60º, 300º 14) 30º, 150º, 270º 15) 0º, 30º, 150º 16) 30º, 150º, 160º31'44", 340º31'44" 17) 30º, 150º, 210º, 330º 18) 30º, 150º 19) 45º, 161º33'54", 225º, 341º33'54" 20) 51º19'4", 180º, 308º40'56" 21) 0º, 180º 22) 45º, 71º33'54", 225º, 251º33'54" 23) 6º, 30º, 54º, 78º, 102º, 150º, 174º, 222º, 246º, 294º, 318º 24) 60º, 180º, 300º 31) 30º, 150º, 210º, 330º 32) 0º, 60º, 120º, 180º, 240º, 300º 33) 45º, 75º57'50", 225º, 255º57'50"

6. 1) π/6 (30º), π/3 (60º) 2) (45º, 15º), (225º, 75º), (165º, 135º) 3) (45º, 45º) 4)(45º+ 2k·360º, 60º + 2k·360º), ((2k + 1)360º – 45º, 2k·360º-60º) 5) (90º, 120º), (90º, 240º), (210º, 0º), (330º, 0º) 6) (90º, 30º)

7. a) C = 42º28'; b = 236m c = 216m b)C = 67º33' a = 85,89m c = 79,38m
c) c = 22,9m B = 57º24' C = 32º36' d) a = 10m B = 53º8' C = 36º52' e) b = 12m B = 67º23' C = 22º37'
f) B = 58º46' a = 82,4m b = 70,4m g) C = 22º39' a = 322cm b = 297cm
h)B = 41º50' b = 8,43cm c = 9,43cm i) a = 5 cm A = 90º B = 36º52'12" C = 53º7'48"

8. 14,17cm^2

9. 1,8297 dm

10. a) l = 37,5 cm; ap = 45,3 cm b) l = 65,8 cm; ap = 19 cm c) l = 147 cm; ap = 101 cm
d) l = 41,65 cm; ap = 43,25 cm e) l = 188,9 cm; ap = 352,6 cm

11. 65 m aprox.

12. 20m aprox.

13. 16,3 m^2

14. 274,5 cm

15. l = 3,71 m; A = 8,90m^2

16. 83,14 cm^2

17. 10º; 56º

18. 21692m; 30155m y 27527m

19. 590 m

20. 16m

21. 4m

22. 373 cm^2.

23. a) a = 0,950m B = 7º42' C = 160º19' b) c = 19.5cm A = 44º9' B = 72º24'
c) A = 53º58' B = 78º50' C = 47º12' d) A = 27º13' B = 6º32' C = 146º15'

24. 161º3'; 134º25'; 26º38' resp.

25. PB = 185,23m PQ = 195m

26. Dist.Oblic.A = 1948m; Dist. Hor. A = 1295m; Dist.Obl.B = 2437m; Dist.Hor.B = 1955m; Altura = 1455m.

27. 35,86m

28. 393 Km

29. 176,4 Km/h; N8º18'O

30. 2536m apr.

31. Rampa 23º12'

32. 11,7 m²

33. 4,1 cm y 13,5 cm

34. E20º42'N; 4h17m41s

35. 1.8m² ó 15.8 m²

36. DistB =,95 Km; DistC = 127 Km

37. 331 m aprox.

38. 98º3'; 31º49' y 50º7'

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

1. Calcular la distancia existente entre los distintos pares de puntos:
   a) A(1, 2) , B(2, 1) b) C(-1, 0) , D(2, 4) c) E(-2, -5) , F(3, -2) d) G(2, 2) , H(2, -2)
2. Calcular a para que la distancia existente entre los puntos A(a, 1) y B(4, 7) sea 10
3. Calcular con un error menor que una centésima el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos A(-2, 0), B(2, 0) y C(0, 2)
4. Un segmento es tal que uno de sus extremos es el origen de coordenadas y el otro el punto P(4, -6). Determinar las coordenadas del punto medio de ambos.
5. Dados los puntos P(3, 6) y Q(-1, 2), determinar el punto R, alineado con ellos, de manera que se verifique: d(P, R) = d(R, Q)
6. Dado el segmento de extremos M(1, -3) y N(7, 5), determinar un punto P, situado sobre él que lo divida en dos partes tales que d(M, P)/d(P, N) = 4
7. Considerando los puntos M y N del ejercicio anterior, calcular las coordenadas de un punto S, alineado con ellos, tal que d(M, S) = 5d(S, N)
8. Hallar la ecuación de la recta de pendiente -2 y ordenada en el origen 5.
9. Hallar la ecuación de una recta que, siendo paralela a la bisectriz del primer-tercer cuadrantes, tenga como ordenada en el origen 2.
10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-1, 2) y tiene pendiente 2.
11. Hallar la ecuación de la recta determinada por los puntos M(1, 1) y N(-3, 2).
12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-3, -2) y corta al eje horizontal en el punto de abscisa 4.
13. Calcular la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que pasa por A(1, 1) y B(2, -5).
14. Hallar el área del triángulo de vértices O(0, 0), A(4, 0) y B(0, 6).
15. Hallar la ecuación, en forma explícita, de la recta que contiene al punto P(-2, 2) y es paralela al vector v(3, 2).
16. Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por el punto Q(-4, 7) y tiene pendiente -3.
17. Calcular la pendiente de la recta que pasa por el punto R(1, 4) y tiene ordenada en el origen -3.
18. Una recta corta la parte positiva de los ejes de coordenadas en dos puntos que determinan con el origen dos segmentos de 4 unidades de longitud. Hallar su ecuación.
19. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los puntos P(-1, 0) y Q(2, -2)
20. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2, 5) y por el origen de coordenadas.
21. Averiguar si los puntos A(-5, 3), B(-2, 2) y C(1, 1) están alineados. En caso afirmativo, hallar la ecuación de la recta que los contiene.
22. Hallar la ecuación explícita de una recta, sabiendo que los segmentos que determina su intersección con los ejes horizontal y vertical miden 4 y -2 unidades, respectivamente.
23. Hallar la ecuación canónica de la recta determinada por los puntos A(3, 0) y B(0, 2).
24. Hallar el área del triángulo limitado por la recta 2x - 5y - 10 = 0 y los ejes de coordenadas.
25. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A(2, -3) y B(-1, -1).
26. Hallar la pendiente de la recta determinada por los puntos A(1, 4) y B(2, 6).
27. Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y la recta de ecuación $2x\text{-}y+5=0$.
28. Hallar la distancia entre el punto M(2, -3) y la recta de ecuación y=4x+6.
29. Calcular la distancia que separa el punto N(-5, 0) de la recta y-3=0.
30. Determinar el coeficiente A para que la distancia entre el punto P(1, 3) y la recta Ax+4y+5=0 sea de 4 unidades.
31. La distancia entre el punto Q(3, -1) y la recta 3x + 4y - C = 0 es de 2 unidades. Calcular C.
32. Hallar la ecuación de una recta de pendiente m=3/2 que dista 2 unidades del origen de coordenadas.
33. Una recta es tal que pasa por el punto R(5, 7) y dista 3 unidades del punto S(-1, 4). Hallar su ecuación.
34. Dadas las rectas 2x-y+3=0, x+4y+1=0; hallar la ecuación de una tercera recta que pasa por su punto de intersección y dista 2 unidades del origen de coordenadas.
35. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas de ecuaciones y=x+3 y 2x-5y+4=0.
36. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado entre la bisectriz del primer cuadrante y el semieje horizontal positivo.
37. Calcular la distancia existente entre las rectas paralelas 3x+4y-1=0 y 3x+4y+7=0

38. Determinar la incidencia de los puntos y rectas que figuran a continuación:
    a) A(0, 7); 7x-3y+21=0 b) B(1, 4); 2x+3y-21=0 c) C(2, 5); 5x-2y=0
    d) D(-2, 4); 2x-y-1=0 e) E(-1, -3); x+y+4=0 f) F(3, -2); y=3x+5
39. Determinar a para que la recta y=ax+4 pase por el punto P(2, -3).
40. Hallar los puntos de intersección de los siguientes pares de rectas:
    a) 3x-y-5=0; 2x+3y-7=0 b) 3x+2y-1=0; 5x-3y-8=0 c) 2x+3y-2=0; x+2y=0
    d) y=(3x-5)/2; y=(16-2x)/5 e) 3x-2y=0; y=0 f) 2x-3y=0; x=0
41. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto de intersección de las rectas 4x+3y+2=0; x-y+5=0.
42. Calcular los ángulos que forman los pares de rectas del ejercicio número 19.
43. Una recta es tal que su ordenada en el origen es 4. Calcular su ecuación sabiendo que pasa por el punto de intersección de las rectas 2x-3y+6=0 y x+4y-1=0.
44. Calcular el valor de A y B para que las rectas 2x+4y-1 y Ax+By+3 sean coincidentes.
45. Calcula el ortocentro y el área del triángulo cuyos vértices son O (0, 0), A(-1,7) y B(4, 3).
46. Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo con vértices en A(-2, -2), B(-2, 2) y C(2, 2)
47. Un rombo ABCD tiene su vértice B en el eje de ordenadas, siendo A (-3, -2) y C(2, 1), determina B, D y el área.
48. Un paralelogramo tiene su centro en el punto M(2, 3) y dos de sus lados están sobre las rectas *y=2x* e *y=x/2*. Halla las coordenadas de sus vértices A y C, su perímetro y su área.
49. Determina el punto de la recta *2x-4y-1=0* que con el punto A(-4, 0) y el origen de coordenadas, determina un triángulo de área 3.
50. Los puntos B(-1, 3) y C(3, -3) determinan el lado desigual de un triángulo isósceles ABC tal que A está en la recta *x+2y-15=0*. Determina el vértice A, las alturas del triángulo y su ortocentro.
51. El triángulo ABC es isósceles. El lado desigual tiene por extremos A(3, 1) y B(-2, 3). El vértice C está en el eje de ordenadas. Halla las ecuaciones de los lados y el área.
52. La diagonal menor de un rombo, que es igual al lado, tiene por extremos los puntos B(2, 1) y D(6, 7). Halla la ecuación de la otra diagonal, el perímetro del rombo y sus ángulos interiores.
53. La recta *2x-3y+12=0* determina con los ejes de coordenadas un segmento AB. Halla la ecuación de su mediatriz.
54. Se dan los puntos A(0, -1) y B(1, 2) y la recta *x+y-2=0*. Determina los puntos de la recta dada que sean pies de las perpendiculares por A y por B.
55. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de las rectas de ecuaciones *x+4y-18 = 0* y *x+2y-2=0*, de manera que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
56. Se pide encontrar una recta que, junto con las de ecuaciones *3x+2y-6=0* y *2x+3y+6=0* forme un triángulo isósceles cuyos lados iguales estén sobre las rectas dadas y que su baricentro sea el origen de coordenadas.
57. Calcular el área limitada por la recta *3x+2y-6=0*, los ejes de coordenadas y la ordenada correspondiente a x=4.
58. Los ejes de coordenadas y las rectas *3x+4y-12=0* y *5x+6y-30=0* forman un cuadrilátero del que se pide su área y su perímetro.
59. Calcula el área del triángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta que, pasando por el punto P(1, 2), forma un ángulo de −45º con la recta de ecuación *2x+3y-5=0.*
60. Halla la distancia del punto P(6, 5) a la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (-4, 0) y (0, 3).
61. Determina sobre la recta *3x-5y+25=0* un punto que diste lo mismo de A(3, 4) y de B(7, 8).
62. Dada la recta r: *3x+4y+5=0* y el punto A(2, 7), calcula las coordenadas de A’ simétrico de A respecto de r.
63. El paralelogramo ABCD tiene los vértices A(-1, 1), B(0, -1) y C(3, 2). Halla las coordenadas de D y el área.
64. La recta x+2y-12=0 y sus simétricas respecto de los ejes de coordenadas, forman con la recta 2x+y+8=0 un cuadrilátero. Halla sus vértices y las longitudes de sus lados.
65. Calcular la ecuación de la recta que, pasando por A(2, 3), forma un ángulo de +45º con la recta 4x-3y+2=0.

1. a) $\sqrt{2}$; b) 5; c) $\sqrt{34}$; d) 4
2. a = 12 ó –4
3. 9,66
4. (2, -3)
5. R(1, 4)
6. P(29/5, 17/5)
7. S(6, 11/3)
8. y = –2x + 5
9. y = x + 2
10. y = 2x + 4
11. y = (–x + 5)/4
12. y = (2x – 8)/7
13. m = –6, n = 7
14. A = 12
15. y = (2x + 10)/3
16. n = –5
17. m = 7
18. y = –x + 4
19. x = 3t – 1; y = –2t
20. y = 5x/2
21. y = (–x + 4)/3
22. y = x/2 – 2
23. x/3 + y/2 = 1
24. A = 5
25. 2x + 3y + 5 = 0
26. m = 2.
27. $\sqrt{5}$
28. $\sqrt{17}$
29. 3
30. 3 ó -11/15
31. -5 ó 15
32. $3x - 2y + 2\sqrt{13} = 0$
33. y – 7 = 0; 4x – 3y + 1 = 0
34. No existe
35. $\left(\sqrt{29}\mp 2\sqrt{2}\right)x\ (5\sqrt{2}\mp\sqrt{29})y + \left(3\sqrt{29}\mp 4\sqrt{2}\right) = 0$
36. $x - (1 + \sqrt{2})y = 0$
37. 8/5
38. a) $\in$ b) $\notin$ c) $\in$ d) $\notin$ e) $\in$ f) $\notin$
39. a = –7/2
40. (2, 1), (1, -1), (4, -2), (3, 2), (0, 0), (0, 0)
41. 18x + 17y = 0
42. a) 105º15´ b)64º39´ c)172º52´ d)78º7´ e)56º19´ f)56º19´
43. 12x – 7y + 28 = 0
44. A = –6, B = –12.
45. (68/31, 85/31); 31/2
46. (0, 0)
47. B(0, -4/3), D(-1, 1/3), A = 17/3
48. A(4/3, 2/3), B(4, 6), D(8/3, 16/3), A = 16/3
49. (-5/2, -3/2) ó (7/2, 3/2)
50. A(7, 4); 4x – 6y – 4 = 0; 8x + y – 21 = 0; 4x + 7y – 17 = 0; H(5/2, 1)
51. r(AB):2x + 5y – 11 = 0; r(BC):9x – 8y – 6 = 0; r(AC):x – 12y + 9 = 0; A = 29/8
52. r(AC):2x + 3y – 20 = 0; P=8$\sqrt{13}$;60º;120º
53. 3x + 2y + 5 = 0
54. (3/2, 1/2); (1/2, 3/2)
55. 3x + 4y + 10 = 0; 5x + 12y – 26 = 0
56. x – y + 6 = 0
57. 9 u^2
58. 9
59. 8,1
60. –2
61. (15/4, 29/4)
62. (-184/25, -207/15)
63. D(2, 4); 9
64. 552/5
65. 7x + y – 17 = 0

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1. En un circuito eléctrico se supone una resistencia (puramente óhmica) total de 0,3 Ω.¿Cómo variaría la intensidad si aumentamos o disminuimos progresivamente la tensión? Hacer una representación gráfica. ¿Cuál será el dominio de variación de V?¿Y el recorrido de los valores de I?¿Y si expresamos V en función de I?
2. Un automóvil que inicialmente se encuentra a 150 m de nuestro punto de observación, se aleja a una velocidad constante de 20 m/s. Representar gráficamente este movimiento anotando sobre el eje horizontal el tiempo. ¿Cuál es el dominio de variación del tiempo?¿Qué valores puede tomar la distancia?
3. En países anglosajones se utiliza la escala termométrica Fahrenheit. El punto de fusión del hielo en esta escala es de 32ºF y el de ebullición del agua de 212ºF. Realizar una gráfica que exprese la equivalencia entre estas escalas.
4. Representar gráficamente las funciones: a) $y = 0$; b) $y = -x$; c) $y = -2x + 3/2$
5. ¿Es una recta vertical la gráfica de alguna función? Explica la respuesta. Idem con una circunferencia.
6. Un niño arroja desde la azotea de su casa (20 m de altura) hacia abajo una pelota con una velocidad inicial de 2 m/s. Establézcase una gráfica del movimiento tomando sobre el eje horizontal el tiempo y el nivel de la calle como origen de medidas de la altura. (Tómese $g = 10\ m/s^2$)
7. Representar la función $y=x^2+4x+4$ e indica cuál es su recorrido.
8. Representar la función $y= |x|/x$. Indica su dominio y recorrido.
9. Una fuente arroja agua a razón de 0,5 l/s. Suponiendo que este gasto se mantiene constante, hacer una gráfica de la velocidad del agua dentro de una tubería en función de la sección de la misma. (Gasto = Sección × velocidad)
10. Se dice que una función está en forma implícita si está escrita de la forma f(x, y) = 0 (o sea, sin despejar la y); y se dice que está en forma explícita si está dada en la forma habitual y = f(x). Escribe en forma explícita las siguientes expresiones:

   a) $xy + 2y - x^2 = 0$ b) $x^2 - y^3 - 7 = 0$ c) $x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{y}} - 3 = 0$ d) $9y^2 - xy - 9x^2 = 0$

11. Obtener el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 5x + 2}$ c) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{x+3}$ f) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$ g) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ h) $f(x) = \sqrt{x^5 - x^4 + x^3 - x^2}$

i) $f(x) = \mathrm{Ln}\dfrac{x-1}{x+1}$ j) $f(x) = \mathrm{Log}(x^2 - x - 2)$ k) $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{\log x + 1}$ l) $f(x) = \log(1-x)+\log(x-1)$

m) $f(x) = \mathrm{tg}(1/x)$ n) $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{sen}\,x}$ ñ) $f(x) = \mathrm{sen}\dfrac{1}{x-1}$ o) $f(x) = e^{-\cos x}$

12. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = -2$ b) $y = -2x$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = -2x - 3$ e) $y = 2x - 3$
f) $y = x^2$ g) $y = x^2 - 4$ h) $y = x^2 - 3x - 4$ i) $y = 3 - 2x - x^2$ j) $y = x^2 + x + 1$
k) $y = 2^x + 2^{-x}$ l) $y = e^{-x^2}$ m) $y = 1 + \cos x$ n) $y = \cos(x+\pi/2)$ ñ) $y = \cos 2x$
o) $y = \mathrm{sen}x + \cos x$ p) $y = E(\cos x)$ q) $y = x + \mathrm{sen}x$ r) $y = |\cos x|$ s) $y = \mathrm{tg}(x/\pi)$
E(·)=Parte entera

13. Escribe una función cuya gráfica es una recta que: a) Pasa por el punto (2, 3) y tiene pendiente igual a 1; b) Pasa por los puntos (1, –1) y (0, 4).
14. Escribe una función polinómica de segundo grado cuya gráfica es la parábola que: a) Pasa por el origen de coordenadas y su vértice es (1, 1); b) Corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 6), (2, 0) y (3, 0).
15. Representar las siguientes funciones indicando su dominio y su recorrido:

   a) $y = |x| - x$ b) $y = x - E(x)$ (E(x) = Parte entera de x) c) $y = \sqrt{20-5x}$ d) $y = \sqrt{x-5}$

e) $y=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x & \text{si} \quad 1<x\le 3 \\ 6-x & \text{si} \quad 3<x\le 6 \\ 0 & \text{si} \quad 6<x \end{cases}$ f) $y=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x & \text{si} \quad x\in(0,2] \\ 0 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$ g) $y=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ 1 & x=2 \\ 4 & x>2 \end{cases}$

h) $y=\begin{cases} 0 & x\in[2k-1,2k) \\ 1 & x\in[2k,2k+1) \end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$ i) $y=\begin{cases} 1 & x\in \\ 0 & x\notin \end{cases}$ $\mathbb{R}$ j) $y=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x\ne 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

16. Tomando como referencia las funciones del ejercicio anterior, estudia: a) si son inyectivas y/o suprayectivas; b) si son pares o impares; c) si son acotadas; d) su monotonía y extremos; e) periodicidad.
17. Representa gráficamente la función $y = |x^2 - 5x + 6|$. Analiza sobre la gráfica sus extremos y su monotonía.
18. Obtener g◦f y f◦g en los casos siguientes:

a) $f(x) = x + 3$; $g(x) = x + 1$ b) $f(x) = x^2+1$; $g(x) = \dfrac{x-2}{2}$ c) $f(x) = x^2 + x + 3$; $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$; $g(x) = \sqrt{x+2}$ e) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x-1}}$, $g(x) = 3-x^2$ f) $f(x) = 2^x$; $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x$

g) $f(x) = e^x$, $g(x) = Ln(x)$ h) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ i) $f(x)=arcsen(x)$, $g(x) = sen(2x)$

19. Averigua los siguientes resultados:
a) sen(arctg x) b) sen(2arcsenx) c) sen(arcsenx–arccosx) d) cos(arcsenx+arcseny)
20. Escribe las correspondencias inversas de las siguientes funciones, indicando en qué casos son funciones y en qué casos no:

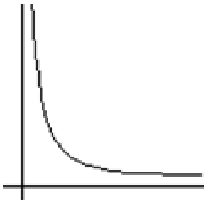
a) $y = \sqrt{x^2-1}$ b) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$ c) $y = \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ d) $y = x^2 + 4x + 4$ e) $y = 2^{x-1}$

f) $y = \log(2x+3)$ g) $y = \log\sqrt{x-1}$ h) $y = \sqrt{1-\cos x}$ i) $y = Ln\dfrac{x+1}{x-1}$ j) $y = e^{-\cos x}$

21. Comprueba poniendo un ejemplo que existen funciones f y g tales que $f(x)\cdot g(x) = 0$ no siendo ni f ni g la función nula $y = 0$.
22. Expresa la función, y representa la gráfica, que nos dé el dinero gastado en fotocopias según el número de copias realizado suponiendo que cuestan a 6 cts. cada una hasta la décima; 5 cts. de la décima a la quincuagésima y de 50 copias en adelante salen a 4 cts. cada una.
23. El radio de un círculo mide 10 cm. Expresar el área de un rectángulo inscrito en el mismo en función de la medida x de la base. ¿Cuál es el dominio?
24. Un rectángulo tiene de perímetro 80 m. Expresar la altura del rectángulo y su área en función de la longitud x de la base. ¿Cuál es el dominio?
25. Una escalera de 5 m de largo está apoyada en una pared. El pie de la escalera está a 3 m de la pared. Se va separando el pie de la escalera del muro a una velocidad de 0,5 m/s. Escribe una función que dé la distancia de la parte superior de la escalera al suelo en función del tiempo transcurrido.
26. León Bermúdez es un vendedor, que conduce su propio coche, en una empresa comercial. Ésta le subvenciona para tales viajes a 18 cts/Km. El señor Bermúdez estima que sus costes fijos por año, tales como impuestos, seguro y depreciación, son 1800 €. Los costes directos o variables, como combustible, aceite y engrase, suponen 10 cts/Km. Escribir las funciones correspondientes y determinar el número de kilómetros que debe hacer para que no gane ni pierda.
27. Cada paso de una llamada telefónica cuesta 3 cts, y cada uno de ellos dura un minuto. Dibuja la gráfica que indica el coste de una llamada de cinco minutos.
28. Se ha decidido repartir x casetas para los guardas de un parque natural; cada una de ellas estará unida a las restantes por un camino distinto. Expresa el número de caminos en función de las casetas. ¿Qué tipo de función es? Escribir los primeros términos de esta función.
29. En un estudio de mercado, la curva de oferta de un determinado producto viene dada por la expresión $y = 0{,}7x + 8$ y la curva de demanda por $y = 1{,}3x - 4$. Si el punto de corte de ambas curvas es el punto de equilibrio al que se aproxima el mercado, hallar dicho punto.

SOLUCIONARIO – FUNCIONES

1. La intensidad aumenta o disminuye con la tensión: I=V/0,3
Teóricamente el dominio de V sería R. El recorrido de I también sería R. V = 0,3I representa una recta que pasa por el origen.



2. s = 150 + 20t. Tanto el dominio como el recorrido es R.

3. ºC = 5(ºF – 32)/9

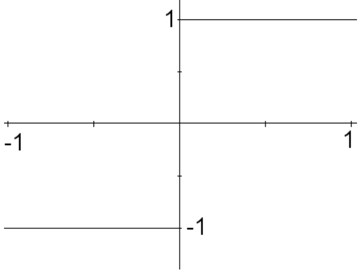
4. y = 0→Eje horizontal; y = –x → bisectriz del 2º-4º cuadrantes; y = –2x+3/2 recta que pasa por (0, 3/2) y (3/4, 0)

5. NO, pues correspondería más de un valor de y a uno sólo de x. Igual con la circunferencia

6. $h = 20–2t–5t^2$
(parábola V(1/5, –101/5))

7. Parábola V(-2, 0)
Recorrido: [0, +∞)

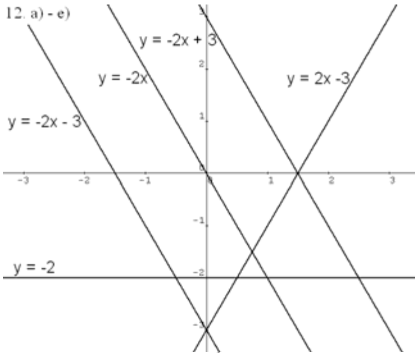
8. Df = R–{0};Rf = {–1,1}

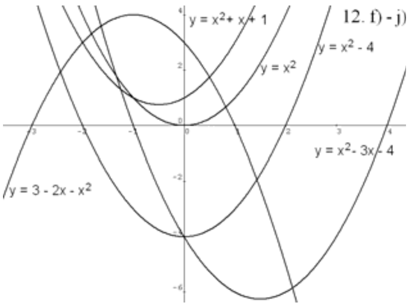


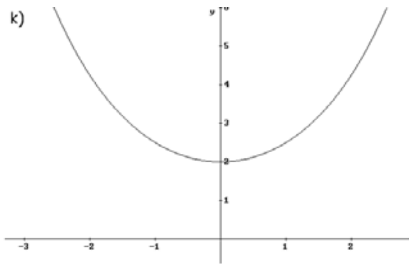
9. G = 0,5S→recta por O

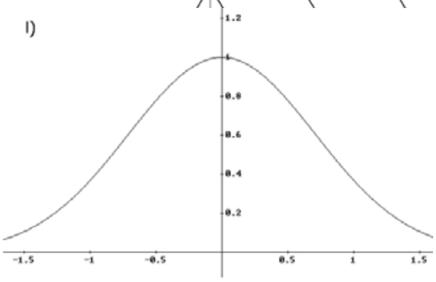
10. a) y = x2/(x + 2)
b) y = $\sqrt[3]{x^2-7}$
c) y = 1/(x2-3)2
d) y = (1±5√13)x/18

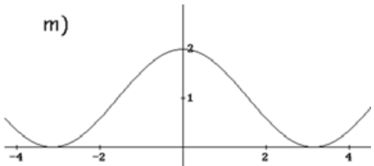
11. a) R–{–3} b) R–{ ½ , 2} c) R
d) R–{0, 1} e) [-3, +∞)
f) (–∞, ½]∪[2, +∞) g) R
h) {0}∪[1, +∞)
i) (–∞, –1) ∪[0, +∞)
j) R k) (–∞, –2] ∪[2, +∞)
l) (–∞, –2) ∪[1, 3] ∪(2, +∞)
m) (–∞, –1)∪(1, +∞)
n) (–∞, –1)∪(2, +∞)
ñ) (0, +∞)–{0'1} o) ∅

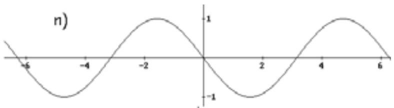


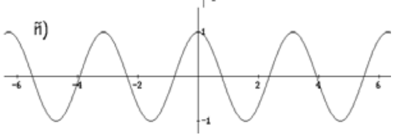


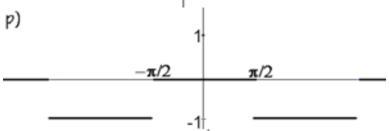


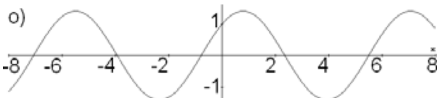


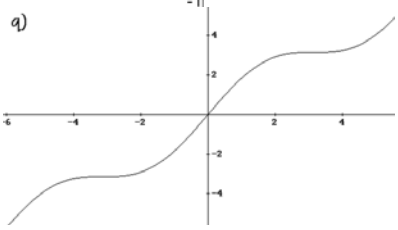


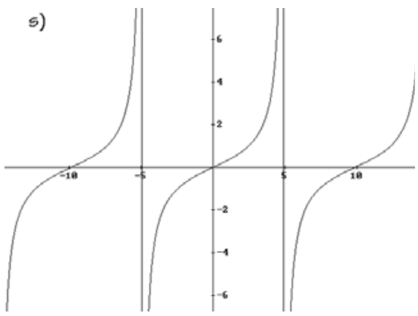


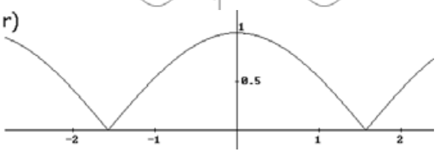












13. a) y = x + 1 b) y = –5x + 4

14. a) $y = 2x– x^2$ b) $y = x^2 – 5x + 6$

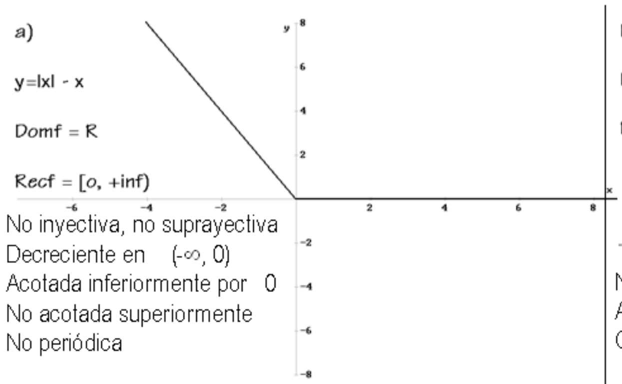
15. 16:

a)

$y = |x| - x$

Domf = R

Recf = [o, +inf)

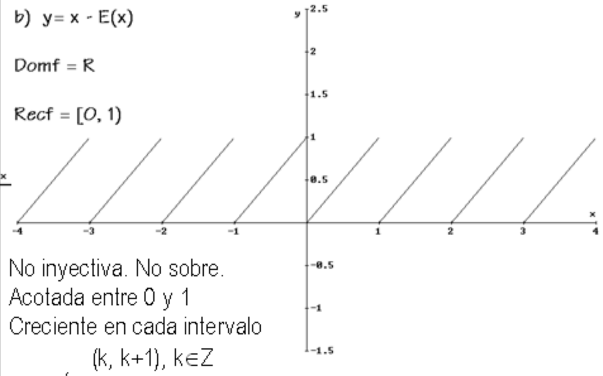


No inyectiva, no suprayectiva
Decreciente en (-∞, 0)
Acotada inferiormente por 0
No acotada superiormente
No periódica

b) $y = x - E(x)$

Domf = R

Recf = [O, 1)

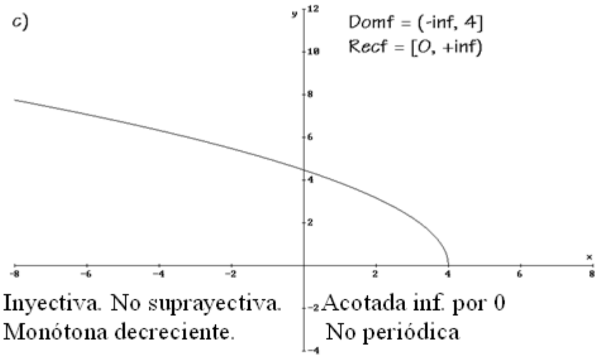


No inyectiva. No sobre.
Acotada entre 0 y 1
Creciente en cada intervalo (k, k+1), k∈Z
PERIÓDICA de período p = 1

$y = \sqrt{20 - 5x}$

c)

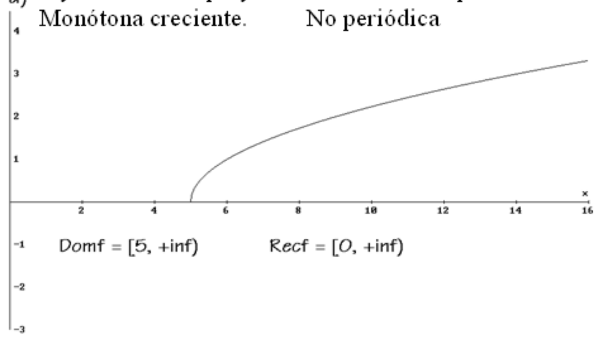
Domf = (-inf, 4]
Recf = [O, +inf)



Inyectiva. No suprayectiva. Acotada inf. por 0
Monótona decreciente. No periódica

$y = \sqrt{x - 5}$

d) Inyectiva. No suprayectiva. Acotada inf. por 0
Monótona creciente. No periódica



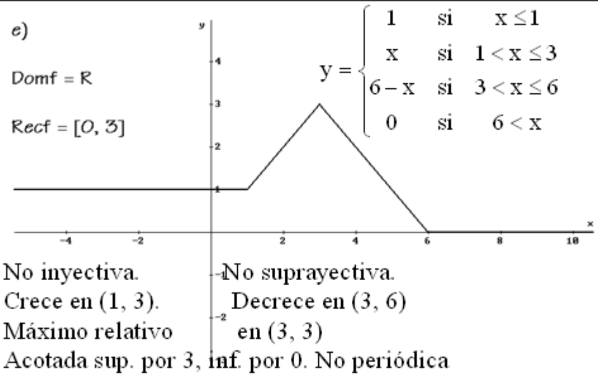
Domf = [5, +inf) Recf = [O, +inf)

e)

Domf = R

Recf = [O, 3]

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ 6 - x & \text{si} \quad 3 < x \le 6 \\ 0 & \text{si} \quad 6 < x \end{cases}$$



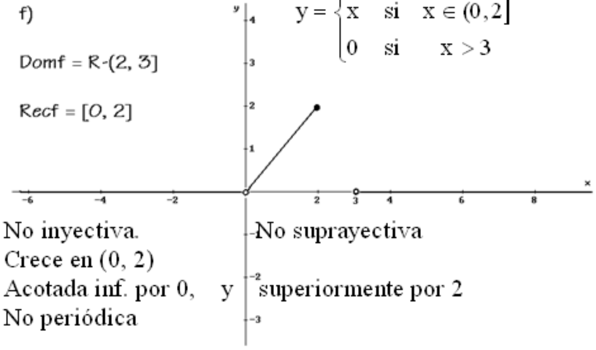
No inyectiva. No suprayectiva.
Crece en (1, 3). Decrece en (3, 6)
Máximo relativo en (3, 3)
Acotada sup. por 3, inf. por 0. No periódica

f)

Domf = R-(2, 3]

Recf = [O, 2]

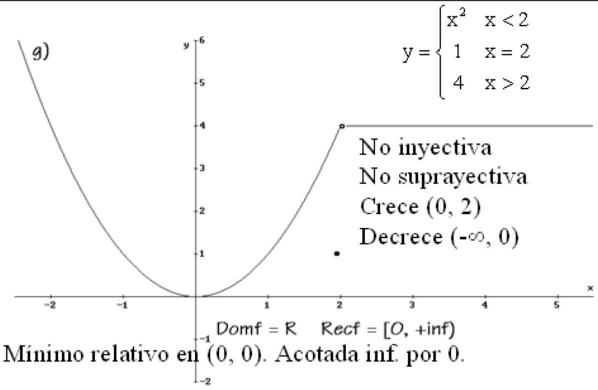
$$y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \in (0, 2] \\ 0 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$



No inyectiva. No suprayectiva
Crece en (0, 2)
Acotada inf. por 0, y superiormente por 2
No periódica

g)

$$y = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$



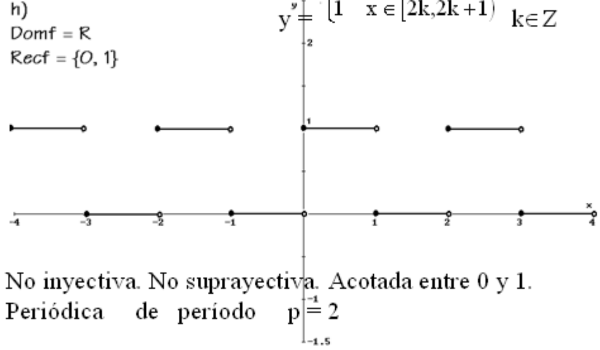
No inyectiva
No suprayectiva
Crece (0, 2)
Decrece (-∞, 0)

Domf = R Recf = [O, +inf)

Mínimo relativo en (0, 0). Acotada inf. por 0.

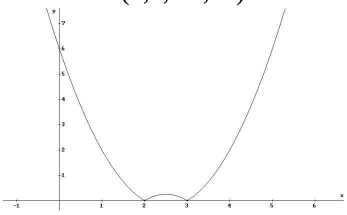
h)
Domf = R
Recf = {O, 1}

$$y = \begin{cases} 0 & x \in [2k-1, 2k) \\ 1 & x \in [2k, 2k+1) \end{cases} \quad k \in Z$$



No inyectiva. No suprayectiva. Acotada entre 0 y 1.
Periódica de período p = 2

17. Decrece en $(-\infty, 2)$ y en $(2;5, 3)$. Crece en el resto del dominio que es R. Mínimos relativos en $(2, 0)$ y en $(3, 0)$. Máximo relativo en $(2{,}5,\ 0{,}25)$



18. a) $g \circ f(x) = x + 4$ $f \circ g(x) = x + 4$

b) $g \circ f(x) = (x2 - 1)/2$ $f \circ g(x) = (x2 - 4x + 8)/4$

c) $g \circ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+2}$ $f \circ g(x) = \sqrt{\dfrac{4x+7}{x+2}}$

d) $g \circ f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}}$ $f \circ g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

e) $g \circ f(x) = f \circ g(x) = 1/|x|$

f) $g \circ f(x) = \sqrt{x^4+2x^3+7x^2+6x+10}$ $f \circ g(x) = \sqrt{x^2+1} + x^2 + 4$

19. a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ b) $2x\sqrt{1-x^2}$ c) $2x^2 - 1$ d) $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy$

20. a) $y = \pm\sqrt{x^2+1}$ NO   b) $y = \dfrac{2x+1}{2-x}$ SÍ   c) $y = 4(x-2)^2/(x+1)^2$ SÍ

d) $y = -2 \pm \sqrt{x}$ NO   e) $y = \log_2 x$ SÍ   f) $y = ½ (10x-3)$ SÍ

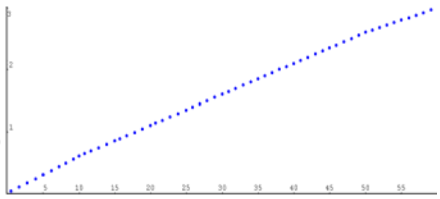
g) $y = 1+102x$ SÍ   h) $y = \arccos(1-x^2)$ NO

i) $y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ SÍ   j) $y = \arccos\mathrm{Ln}(1/x)$ NO

21. $f(x)=|x|+x$; $g(x)=|x|-x$

22.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}06x & 0 < x \le 10 \\ 0{,}6 + 0{,}05(x-10) & 10 < x \le 50 \\ 2{,}6 + 0{,}04(x-50) & x > 50 \end{cases}$$

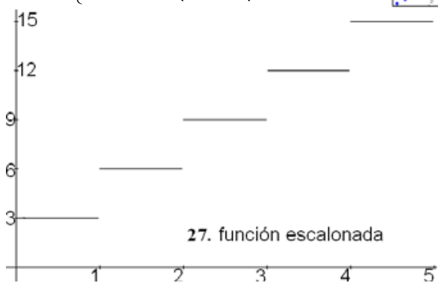


23. $A(x) = x\sqrt{400 - x^2}$
Df = (0, 20)

24. $h = 40 - x$; $A(x) = 40x - x^2$
Df = (0, 40)

25. $d(t) = \dfrac{\sqrt{64 - 12t - t^2}}{2}$

26. $G(x) = 1800 + 0{,}1x$; $S(x) = 0{,}18x$ → De igualar G(x) y S(x) se deduce que debe recorrer 22500 km



27. función escalonada

28. $f(x) = x(x-1)/2$ función cuadrática de variable natural: 0, 1, 3, 6, 10, …

29. (20, 22)

LIMITES/CONTINUIDAD/DERIVADA

LÍMITES DE FUNCIONES

1. Calcular los siguientes límites de funciones:

1) $\lim_{x\to 2}(3x^2-x+5)$

2) $\lim_{x\to\infty}(3x^2-x+5)$

3) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+3\right)$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+3\right)$

5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$

6) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{5x^4+3x^3+2x^2+x+1}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+x+14}{x^3+x^2+2}$

8) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+6}{x^4-x^3+x-1}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^3+x^2}$

10) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}-\frac{x^2-4}{x-2}\right)$

11) $\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$

12) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

13) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$

14) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

16) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)$

17) $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}}$

18) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^3-x+1}\right)$

19) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

20) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

21) $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$

22) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right)$

23) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+1}{2x}\right)^x$

24) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+1}{2x^2}\right)^{x^2}$

25) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$

26) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right)^x$

27) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

28) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+3}{2x^2+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

29) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)^x$

30) $\lim_{x\to 0}\log\frac{x^2+x}{x}$

31) $\lim_{x\to+\infty}\log_2\frac{2x+1}{x}$

32) $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{Ln}\left[\frac{x+1}{x}\right]^x$

33) $\lim_{x\to 0^+}\left[4^x+\log_{1/2}x\right]$

34) $\lim_{x\to 0}\frac{3\mathrm{tg}x}{2\mathrm{sen}x}$

35) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

36) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}x}{\sec x}$

37) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}5x}{x}$

38) $\lim_{x\to\pi/2}(\sec x-\mathrm{tg}\,x)$

39) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x-\cos x}{x}$

40) $\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1-\cos x}$

41) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$

42) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}10x}{\mathrm{sen}5x}$

43) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{sen}2x}$

44) $\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\mathrm{sen}^3x}$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

2. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{3x-2}{2x^2-5x+2}$ c) $y = \dfrac{x+1}{x^4-3x^3+6x-4}$

d) $y = \sqrt{2x^2-5x-2}$ e) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ f) $y = \dfrac{1}{|x|-1}$

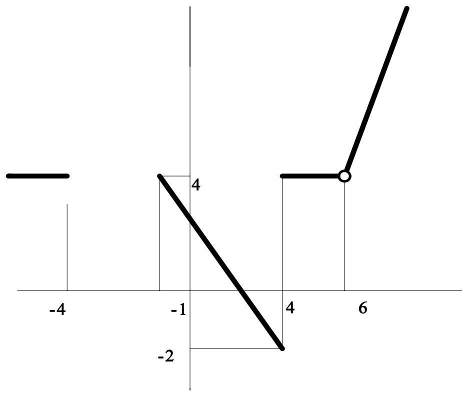
g) $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ h) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ i) $y = \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

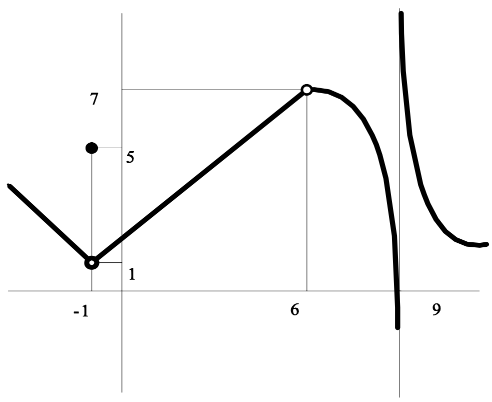
j) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ k) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ l) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 1 \\ 3x & x > 1 \end{cases}$

m) $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2x-2 & x > 1 \end{cases}$ n) $f(x) = \begin{cases} 11-4x & x > 2 \\ 2x-1 & x \leq 2 \end{cases}$ ñ) $f(x) = \begin{cases} kx & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$

o) $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2+1 & x > 1 \end{cases}$ p) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ k & x = 3 \end{cases}$ q) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$

3. Indicar las discontinuidades de las funciones representadas en las siguientes gráficas explicando el por qué de ellas:





4. ¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas en un entorno del punto cero?

a) $f(x) = 2^{-x}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

5. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, determina a y b para que sea continua.

6. Construye dos funciones que no sean continuas en 0 y, sin embargo, sí lo sea su suma.

7. A) Si f es una función continua en un punto $a \in \mathbb{R}$ y g es discontinua en el mismo punto, ¿puede ser la función f+g continua en a?

B) Da un ejemplo de una función discontinua en todos los puntos de [0, 1], tal que |f| sea continua en todos los puntos de [0, 1].

DERIVADAS

8. Encuentra las funciones derivadas de las siguientes (la variable independiente es siempre x):

1) $y = 4x^3$	2) $y = 5x^3 - 4x^2 + 2x - 7$	3) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	4) $y = a^5$
5) $y = x(x-1)$	6) $y = (x+1)(x-1)$	7) $y = (x+1)(x^2-x+3)$	8) $y = x(x-1)^2$
9) $y = x(a-1)^2$	10) $y = a(a-1)^2$	11) $y = 5\log_5 5x$	12) $y = 2\ln x + \operatorname{sen} x - 4\cos x$
13) $y = x(1+x)^5$	14) $y = x \cdot \operatorname{sen} x$	15) $y = x \operatorname{tg} x$	16) $y = (1+x^2)^7$
17) $y = \ln(\operatorname{sen} x)$	18) $y = \operatorname{sen}(\ln x)$	19) $y = \sec x$	20) $y = (x^2-3x+1)\operatorname{sen} x + x\cos x$
21) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$	22) $y = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$	23) $y = x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \ln x$	24) $y = x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)$
25) $y = \ln x^2 + \ln^2 x$	26) $y = e^{2x}$	27) $y = 3^x$	28) $y = x \cdot e^x$
29) $y = x \cdot 4^x$	30) $y = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$	31) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	32) $y = \operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})$
33) $y = \sqrt{1+x^4}$	34) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$	35) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$	36) $y = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$
37) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	38) $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x$	39) $y = \operatorname{Ln} \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$	40) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
41) $y = \operatorname{arctg} x + \ln(x^2+1)$	42) $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{1-x^2}$	43) $y = e^{\ln(\operatorname{sen}^2 x)}$	44) $y = x^x$
45) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$	46) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$	47) $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	48) $y = (\operatorname{arcsen} x)^{25}$
49) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + 3x^2 - 5}$	50) $y = \operatorname{sen}^2 \pi x$	51) $y = \dfrac{x-5}{(x+3)^3}$	52) $\operatorname{arcsen}(e^{2x})$

9. Utilizando sólo la definición de derivada, calcula las de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x-5}$ (en x = 9) b) $f(x) = x \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{1+x^2}\right)$ en x = 0 c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

10. Calcula la derivada de orden n de la función $f(x) = e^{2x}$

11. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola de ecuación $y = x^2 + x + 1$ que sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

12. ¿En qué puntos la curva $y = x^3 - 2x + 2$ tiene tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

13. ¿En qué punto la tangente a la curva y = Lnx es paralela a la cuerda que une los puntos (1, 0) y (e, 1)?

14. La función $f(x) = |x+1|$ no tiene derivada en un punto. ¿Cuál es ese punto? Representar primero la gráfica de la función y, sobre ella, razonar la respuesta.

15. Hallar los puntos en los que $y = |x^2 - 5x + 6|$ no tiene derivada. Justificar el resultado representando también su gráfica.

SOLUCIONES – CONTINUIDAD/DERIVADA

1.
1. 15
2. $+\infty$
3. ∄
4. 3
5. $+\infty$
6. 1/5
7. 0
8. ∄
9. 0
10. –15/4
11. 1/2/5
12. 20/5
13. 0
14. ∄
15. -2
16. $+\infty$
17. ∄ (¿)
18. $-\infty$
19. /2/2
20. 1
21. 1/2
22. $+\infty$
23. $+\infty$
24. 0
25. Exp(-6)
26. $+\infty$
27. exp(–1/4)
28. exp(-1/2)
29. e
30. 0;
31. 1
32. 0;
33. $+\infty$;
34. 3/2;
35. 0;
36. 1;
37. 5;
38. 0;
39. ∄;
40. 2;
41. 0;
42. 2;
43. 3/2;
44. ½.

2. Dominios de continuidad:

a) ℝ

b) ℝ–{1/2, 2}

c) ℝ–{1, ±√2, 2}

d) $(-\infty, 1/2]\cup[2, +\infty)$

e) $(-\infty, -3)\cup[1, +\infty)$

f) ℝ–{±1}

g) ℝ–{kπ/ k∈ℤ}

h) $(0, 1)\cup(1, +\infty)$

i) $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

j) ℝ

k) ℝ

l) ℝ

m) ℝ–{1}

n) ℝ

ñ) ℝ si k = 1

o) ℝ–{0}

p) ℝ si k = 6

q) ℝ

3. a) En [–4, –1] por no existir la función; en x=4, ∄ límite, y ∄f(6)

b) $f(-1) \neq \lim_{x\to -1} f(x)$; ∄f(6) y ∄f(9)

4. a) SÍ; b) NO

5. a = 2; b = 0

6. f(x) = |x|/x

g(x) = –f(x)

7. A) No porque entonces h = f + g continua, f continua y entonces h + (–f) = g no continua. (contradice que la suma de funciones continuas es continua.

B)

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si\ x\in[0,1]\cap Q \\ -1 & si\ x\in[0,1]\cap Q^C \end{cases}$$

8.
1) $12x^2$
2) $15x^2-8x+2$
3) $3ax^2+2bx+c$
4) 0
5) 2x-1
6) 2x
7) $3x^2+2x$
8) $3x^2-4x+1$
9) $(a-1)^2$
10) 0
11) 5/(xLn5)
12) 2/x + cosx+4senx
13) $(6x+1)(1+x)^4$
14) senx+xcosx
15) $xtg^2x+tgx+x$
16) $14x(1+x^2)^6$
17) cotgx
18) cos(Lnx)/x
19) tgx/cosx
20) $(x-3)senx+(x^2-3x+2)cosx$
21) $2/(senx+cosx)^2$
22) $(1-3x^2)/(1+x^2)^3$
23) senx·Lnx+x·cosx·Lnx+senx
24) sen(Lnx)+cos(Lnx)
25) 2(1+Lnx)/x
26) $2e^{2x}$
27) $Ln3\cdot 3^x$
28) $(1+x)e^x$
29) $(1+xLn4)4^x$
30) $2\cdot e^x\cdot cosx$
31) –1/(2x/x)
32) $tg(x/2)\cdot[1+tg^2(x/2)]$
33) $2x^3/\sqrt{1+x^4}$
34) $-1/(x-1)\sqrt{x^2-1}$
35) $e^x(cosx+senx)/cos^2x$
36) $arctg(\sqrt{x}) + \sqrt{x}/[2(1+x)]$
37) $1/\sqrt{1-x^2}$
38) 0;
39) secx
40) $1/\sqrt{x^2+1}$
41) $(2x+1)/(x^2+1)$
42) $-1/\sqrt{1-x^2}$
43) sen(2x)
44) $(Lnx+1)x^x$
45) chx
46) shx
47) $1-th^2x$
48) $25(arcsenx)^{24}/\sqrt{1-x^2}$
49) $(-x^4+4x^3+6x^2-10x+10)/(x^3+3x^2-5)^2$
50) $\pi sen(2\pi x)$
51) $(18-2x)/(x+3)^4$
52) $2e^{2x}/\sqrt{1-e^{4x}}$.

9. a) ¼

b) Ln2

c) $-1/(x+2)^2$

d) 0

e) 0.

10. $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$.

11. y = x + 1

12. (1, 1); (–1, 3)

13. (e – 1, Ln(e – 1))

14. (–1, 0)

15. (2, 0); (3, 0)

ESTADÍSTICA/PROBABILIDAD

DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

1. Las estaturas y pesos de 10 jugadores de baloncesto de un equipo son:

Estatura (X)	186	189	190	192	193	193	198	201	203	205
Pesos (Y)	85	85	86	90	87	91	93	103	100	101

Se ha calculado: $\bar{x}=195$ cm, $\bar{y}=92$ kg, $\sigma_x = 6{,}06$, $\sigma_y = 6{,}56$ y la covarianza $\sigma_{xy} = 37{,}6$. Se pide:

a) Hallar la recta de regresión de y sobre x.
b) Calcular el coeficiente de correlación.
c) Si el equipo ficha a un jugador que mide 208 cm, ¿se puede predecir su peso? En caso afirmativo, obtenerlo.

2. A partir de los siguientes datos referentes a horas trabajadas en un taller (X), y a las unidades producidas (Y), determinar la recta de regresión de Y sobre X, el coeficiente de correlación lineal e interpretarlo:

Horas de trabajo (X)	80	79	83	84	78	60	82	85	79	84	80	62
Unidades producidas (Y)	300	302	315	330	300	250	300	340	315	330	310	240

3. Ocho personas han realizado un examen. Se ha recogido en el siguiente cuadro el número de horas dedicado al estudio y la calificación obtenida por cada una de ellas:

X: Horas de estudio	20	16	34	23	27	32	18	22
Y: Calificación	6,5	6,0	8,5	7,0	9,0	9,5	7,5	8,0

a) Hallar la recta de regresión de Y sobre X.
b) Estima la calificación para una persona que hubiera estudiado 28 horas.

4. La altura de siete padres y de sus hijos primogénitos vienen dadas, en cm, por la tabla:

X (padres)	155	165	170	169	145	157	168
Y (hijos)	170	160	180	160	165	175	160

a) Hallar la recta de regresión de y sobre x.
b) Valora la procedencia de predecir la altura de un hijo cuyo padre midiera 160 cm.

5. La media de pesos de una población es de 65 kg y la de las estaturas 170 cm, mientras que las desviaciones típicas son de 5 kg y 10 cm, respectivamente, y la covarianza de ambas variables es 40. Calcular la recta de regresión de los pesos respecto de las estaturas. ¿Cuánto se estima que pesará un individuo de 180 cm de estatura?

6. Una multinacional desea predecir el valor anual de sus ventas totales en cierto país a partir de la relación entre éstas y la renta nacional. Para investigar esta posibilidad cuenta con los datos siguientes:

X	189	190	208	227	239	252	257	274	293	308	316
Y	402	404	412	425	429	436	440	447	458	469	469

Donde X representa la renta nacional en millones de dólares e Y representa las ventas de la compañía en miles de dólares en el período de 1990 hasta 2000 (ambos incluidos). Se pide:

a) Obtener la recta de regresión de Y sobre X. ¿Qué expresa esta recta? (Concisamente)
b) Calcular el coeficiente de correlación lineal entre X e Y e interpretarlo.
c) En 2001 se esperaba que la renta nacional de país sea 325 millones de dólares. ¿Cuál sería la predicción para las ventas de la compañía en este año?

7. Se están realizando estudios sobre energía solar, para lo que se ha medido la temperatura máxima y el número de horas de sol durante una semana:

	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
Temperatura	12	14	7	10	15	20	18
Nº de horas	12,35	12,36	12,16	12,36	12,38	12,45	12,40

a) Hallar las temperaturas mediana y modal máximas diarias.
b) Hallar la recta de regresión de la temperatura en función del número de horas de sol.
c) El lunes siguiente a la realización de la experiencia se rompió el medidor de horas de sol. ¿Podemos estimar este número a partir de la función obtenida en el apartado anterior? Justificar la respuesta y obtener esta estimación si sabemos que la temperatura máxima fue de 19ºC.

8. Un conjunto de datos bidimensionales (x_i, y_i) tiene coeficiente de correlación r = –0,9, siendo las medias de las distribuciones marginales $\overline{x}=1$, $\overline{y}=2$. Se sabe que una de las cuatro ecuaciones siguientes es la de la recta de regresión de Y sobre X:

a) $y = -x + 2$ b) $2x + y = 4$ c) $3x - y = 1$ d) $y = x + 1$

Selecciona razonadamente esa recta.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

9. En un dado trucado, la probabilidad de obtener cada uno de los resultados es inversamente proporcional a los mismos. Calcula: a) La probabilidad de cada una de las caras. b) La probabilidad de sacar un múltiplo de tres.

10. Se lanza un dado dos veces. Calcular la probabilidad de que en la segunda se obtenga un número menos que en la primera.

11. Hallar la probabilidad de que, al lanzar seis veces una moneda normal, se obtenga una racha ininterrumpida de tres caras, por lo menos.

12. Se tiran dos dados de seis caras. Calcula la probabilidad de obtener: a) Dos números pares. b) un número par y otro impar.

13. Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que supere la primera es de un 60%; la de que supere la segunda, de un 80%, y la de que supere las dos, de un 50%. Se pide:
   a) Probabilidad de que supere, al menos, una de las pruebas.
   b) Probabilidad de que no supere ninguna prueba.
   c) ¿Son las pruebas sucesos independientes?
   d) Probabilidad de que apruebe la segunda prueba, en caso de no haber superado la primera.

14. En una caja hay un cierto número de bolas blancas y una roja. Al sacar dos bolas al azar, sin reemplazamiento, la probabilidad de que sean blancas es ½. Halla el número de bolas blancas que había inicialmente en la caja.

15. Una comisión de estudios europeos está formada por 3 alemanes, 4 franceses y 4 italianos. A) Se eligen dos personas aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que sean alemanas? B) Si se eligen tres personal al azar, ¿qué probabilidad hay de que ninguna sea italiana?

16. De las 15 habitaciones dobles de un pequeño hotel de la costa, 10 tienen baño, mientras que de las 10 habitaciones sencillas, sólo 2 disponen de baño. A) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una habitación con baño? B) Si una habitación se sabe que tiene baño, ¿cuál es la probabilidad de que sea sencilla?

17. De una baraja de 40 cartas se sacan dos al azar. Halla la probabilidad de que sean dos reyes.

18. En una caja tenemos dos bolas blancas, una negra y siete rojas. Extrayendo dos bolas sucesivamente, ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola negra seguida de una bola blanca? A) Reponiendo la bola en la caja. B) Sin reponerla.

19. Se han clasificado los donantes de órganos en los siguientes grupos: menores de 15 años, entre 15 y 30 años, entre 30 y 45 años, entre 45 y 60 años, siendo los porcentajes del 5,7; 20,5; 19,4; 27,1 y 26,3. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a un donante de menos de 30 años? ¿Y de más de 60 años?

20. En una empresa, el 60% de los empleados tiene contrato indefinido, el 30% son menores de 35 años y tienen contrato indefinido. Construye una tabla de contingencia. Se selecciona a un empleado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contrato indefinido o sea menor de 35 años? ¿Y de que no tenga contrato indefinido y sea mayor de 35 años?

21. El 40% de los habitantes de cierta ciudad tiene cabellos castaños, el 25% tiene ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:
   a) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga los ojos castaños?
   b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

22. En una estantería hay 60 novelas y 20 libros de poesía. Una persona A elige un libro al azar de la estantería y se lo lleva. A continuación otra persona B elige otro libro al azar.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por B sea una novela?
   b) Si se sabe que B eligió una novela, ¿cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por A sea de poesía?

DISTRIBUCIONES ALEATORIAS

23. Sea X una B(5; 0,25) e Y una B(7; 0,8). Calcula (tabla de la binomial) $p(X \geq 3)$ y $p(4 \leq Y \leq 7)$
24. Sea X una variable binomial B(12; 0,25) e Y una variable binomial B(9; 1/3). ¿Cuál está más concentrada en torno a la media.
25. Se lanza cien veces una moneda al aire. Calcula la probabilidad de que el número de caras que se obtengan esté comprendido entre 45 y 55.
26. ¿Cuál es la probabilidad de obtener más caras que cruces al lanzar una moneda 4 veces?
27. Se propone un test de 8 preguntas con 4 respuestas alternativas cada una, de las que sólo una es correcta. Si una persona responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de que conteste correctamente a 5 o más preguntas? ¿Y de que no acierte ninguna?
28. La tasa de paro en mujeres es del 28,30%. Si se seleccionan 7 mujeres, ¿cuál es el número medio de ellas que están paradas? ¿Cuál es la probabilidad de que al menos lo estén 6?
29. La probabilidad de acierto en tiros libres de un determinado jugador es p = 0,9. Calcula la probabilidad de que una serie de 5 tiros acierte al menos 3 de ellos.
30. El 20% de los tornillos producidos por una máquina son defectuosos. Determinar la probabilidad de que de 4 tornillos elegidos al azar: a) 1 sea defectuoso; b) a lo más, dos sean defectuosos.
31. En un determinado juego se gana cuando al lanzar dos dados se obtiene suma de puntos 10, o más. Un jugador tira en 12 ocasiones los dos dados. Se pide: a) Probabilidad de que gane exactamente en tres ocasiones. b) Probabilidad de que pierda las 12 veces que juega.
32. Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proporción de 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a 5 pacientes a los que aplica la droga
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún paciente tenga efectos secundarios?
    b) ¿Y de que al menos dos tengan efectos secundarios?
    c) ¿Cuál es el número medio de pacientes que espera el laboratorio que sufran efectos secundarios si elige 100 pacientes al azar?
33. Sea Z una variable N(0, 1). Utilizando las tablas, calcula las siguientes probabilidades:

a) $p(Z<1,05)$ b) $p(Z>2,23)$ c) $p(Z<-1,07)$ d) $p(Z>-1,57)$
e) $p(1,01<Z<2)$ f) $p(-1,01<Z<3)$ g) $p(-1,18<Z<-0,5)$ h) $p(|Z|<0,75)$ i) $p(|Z|>1,5)$

34. La temperatura cutánea a la que una persona experimenta dolor es una variable normal de media 45º y desviación típica 1,5º. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no experimente dolor con una temperatura de 47º?
35. Las notas de un examen realizado por 36 alumnos de una clase siguen una distribución N(4,2; 1,3). Calcula: a) Número de alumnos que han aprobado. b) Número de alumnos cuyas notas han resultado comprendidas entre 4 y 6
36. La cantidad de sustancia S contenida en cierta vacuna se distribuye normalmente con media de 50 unidades. Se ha comprobado que la vacuna inmuniza si la dosis suministrada contiene una cantidad de S comprendida entre 46 y 54 unidades. Se sabe que el 2,5% de las dosis contienen una cantidad de S superior a 54 unidades. a) ¿Qué probabilidad hay de que una persona a la que se le administra una dosis elegida al azar, no se inmunice? b) ¿Cuánto vale la desviación típica, aproximadamente?
37. Se sabe que el 75% de los graduados en una universidad obtienen empleo durante el primer año de graduación. Se eligen 8 graduados de dicha universidad. a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al menos, 6 tengan empleo el primer año? b) ¿Y de que, como máximo, 6 tengan empleo?
38. Las precipitaciones anuales en una región son, en media, de 2000 ml/m^2, con una desviación típica de 300 ml/m^2. Calcular, suponiendo distribución normal, la probabilidad de que un año determinado la lluvia no supere los 1200 ml/m^2.
39. Se supone que las tallas de 800 recién nacidos se distribuyen según una normal de media 66 cm y desviación típica 5 cm. Calcular cuántos recién nacidos cabe esperar con tallas comprendidas entre 65 y 70 cm.
40. En una piscifactoría, el peso de las truchas se distribuye según ley N(200, 50). Se toma una al azar: a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso no sea superior a los 175 gramos? b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea superior a los 230 gramos? c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté comprendido entre 225 y 275 gramos?

41. Una empresa ferroviaria sabe que el retraso en la llegada sigue una ley normal de media 5 minutos, y que el 68,26% de los trenes llega con un retraso comprendido entre 2 y 8 minutos.
a) ¿Cuál es la desviación típica?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un tren llegue puntual o antes de la hora?
c) Cuál es la probabilidad de que un tren llegue con retraso de más de 10 minutos?

42. Una panificadora distribuye las porciones de masa según una normal de media 100 gramos y desviación típica 9 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un panecillo cuyo peso esté entre 80 gramos y la media?

43. A una fiesta confluyen 15 chicos y 20 chicas. El peso medio de los 15 chicos es de 58,2 kg, y el de las chicas, 52,4 kg. Las desviaciones típicas de los dos grupos son 3,1 kg y 5,1 kg, respectivamente. Jorge pesa 70 kg y Patricia, 65 kg. ¿Cuál de los dos, dentro del grupo de jóvenes de su sexo, puede considerarse más grueso?

44. Para un sorteo de lotería, una empresa ha repartido participaciones entre sus empleados siguiendo una distribución normal de media 100 y desviación típica 20. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado tenga más de 150 participaciones? (¡Ojo!, distribución discreta)

45. La probabilidad de que un jugador de baloncesto acierte desde la línea de triples es 0,2. Si lo intenta 5 veces, calcula la probabilidad de que: a) no acierte ninguna vez; b) acierte, por lo menos, dos veces. Supongamos ahora que lanzara 10000 veces y que su capacidad de acierto se mantuviera. ¿Qué probabilidad habría de que acertara más de 2080 veces?

46. La estatura de los individuos de una población sigue una distribución $N(1{,}74; \sigma)$. A) Calcular la probabilidad de que una persona, elegida al azar, tenga una estatura inferior o igual a la media. B) Calcula la probabilidad de que la estatura de un individuo, elegido al azar, esté comprendida entre 1,64 m y 1,84 m para un valor de $\sigma = 0{,}05$.

47. Se vacía en el suelo un saco con 500 monedas. a) ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan más de 230 caras? b) ¿Y de que el número de caras sea menor que 200? c) ¿Y de que el número de caras esté comprendido entre 220 y 250?

48. Se ha comprobado que en un determinado núcleo residencial el 60% de los hogares tiene al menos dos televisores. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en dicha zona. A) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores? B) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares tengan cuando menos dos televisores?

49. La duración media de un componente electrónico sigue aproximadamente una variable normal de media 8 años y desviación típica 2 años. El fabricante se compromete a reponer, sin coste alguno, aquellos componentes que fallen durante el período de garantía. Si no quiere reponer más del 0,13% de los componentes fabricados, ¿cuál debe ser el período de garantía que debe establecer?

50. Se presentaron 400 solicitantes a unas pruebas de selección de personal de una empresa cuyas puntuaciones se distribuyen según una normal de media 60 y desviación típica 5. Si sólo se va a admitir al 33%, ¿cuál debe ser la puntuación mínima para ser contratado?

SOLUCIONES – ESTADÍSTICA/PROBABILIDAD

1. a) y = 1,024(x – 195) + 92
b) r ≅ 0,95
c) A partir de la ecuación de la regresión: 105 Kg.

2. y = 3,2(x – 78) + 302,67;
r ≅ 0'87, valor bastante próximo a 1 →la correlación es fuerte y la *predicción* de la ecuación de regresión fiable.

3. a) y = 0,14(x – 24) + 7,75
b) 8,3

4. a) y = –0,06(x – 161,29) + 167,14 → b) ≅ 167

5. y = 0,4(x – 170) + 65→69 kg

6. a) y = 0,49(x – 250,27) + 435,55 (Posible relación entre ambas variables)
b) r = 0,9 correlación fuerte
c) 472000 $

7. a) Me = 10-14; Mo = 20
b) y = 37(x–12,35)+13,71
c) r ≅ 0,74 correlación fuerte: para 19º → x = 0,015(y – 13,71) + 12,35 → 12,43h

8. b) porque la pendiente ha de ser negativa y el termino independiente surge de
–2(x – 1) + 2 = –2x + 4

9. a) p(n) = 20/(49n);
b) 10/49

10. p = 5/36

11. p = ½

12. a) ¼; b) ½

13. a) 90% b) 10%
c) NO: p(A∩B) ≠ p(A)p(B)
d) $p(B/\overline{A}) = p(B\cap\overline{A})/p(\overline{A}) = [p(B)-p(A\cap B)]/p(\overline{A})$ = 75%

14. 3 bolas blancas

15. A) 3/55; B) 7/33

16. A) 0,48; B) 0,17

17. 0,0077

18. A) 1/5; B) 2/90

19. P(< 30) = 0,262
P(> 60) = 0,273

20. P(A∪B) = 0,55
$P(\overline{A}\cap\overline{B})$ = 1–0,55=0,45

21. a) 0,375; b) 0,4; c) 0,5

22. a) Tª P Total: p = ¾
b) tª Bayes: p = 20/79

23. P(X≥3) = 0,0879+0,0146+0,0010=0,1035;
p(4≤y≤7)=p(z≤3) z∈B(7; 0,2)→ p(4≤y≤7)=0,2097+0,3670+0,2753+0,1147 = 0,9667

24. $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ →
σ_x = 1,5; σ_y = 1,4→
y es la más concentrada en torno a la media.

25. B(100; 0,5)
Aproximamos a una N(50; 5):
p(45≤x≤55) = p(-1,1≤z≤1,1)= 2p(z≤1,1)–1 = 0,7286

26. 0,3125

27. B(8, ¼); p(x≥5)=0,027;
p(x=0) = 0,1001

28. 2; 0,0027

29. 0,9914 =

30. $\binom{5}{3}\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^2+\binom{5}{4}\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1^1+\binom{5}{5}\cdot 0{,}9^5\cdot 0{,}1^0$
B(4; 0,2)→ 0,4096
b) 0,9728

31. B(12, 1/9)→
a) 0,1045 b) 0,2433

32. B(5; 0,03)→
a) p = 0,8587
b) 0,0085
c) μ=0,15→ 15 pacientes

33. a) 0,8531 b) 0,0129
c) 0,1423 d) 0,9418
e) 0,1334 f) 0'8425
g) 0,1895 h) 0,5468
i) 0,1336

34. p(x<47)=p[z<(47–45)/1,5]= p(z<1,33) = 0,9082

35. a) p(x≥5) = p(z≥0,62)=0,2676→26,76%→ 10 alumnos aprobados
b)p(4≤x≤6)=p(–0,15≤z≤1,38)= 0,4758→47,58%→17 alumnos.

36. a) p(46<x<54)=0,95→ p(no inmunice)= 1 – 0,95 = 0,05
b) p(0–2σ <x<0+2σ = 0,95→ 46 = 50–2σ →σ = 2

37. a) B(8; 0,75)→ p = 0,67
b) p= 1–(0,26+0,10)=0,64

38. p(x<1200) = p(z<–8/3) = 1–p(z<8/3) = 0,3321

39. p(65≤x≤70)=p(–0,2<z<0,8)= 0,3674→36,74%→ 294 niños.

40. a) 0,3085
b) 0,2743 c) 0,2417

41. a) σ = 3 min.
b) 0,0475 c) 0,0475

42. 0,4968

43. Normalizamos:
70 kg→(70 – 58,2)/3,1 = 3,8
65 kg→(65 – 52,4)/5,1=2,47
Más grueso el chico

44. x discreta: x>150 Aplicamos la corrección de Yates: x'>150,5 ∈N(100, 20) → p(z≥2,525) = 0,0058

45. a) $0{,}8^5$ = 0,32768
b) 0,2627
c)B(10000; 0,2) →
N(2000, 40) → p = 0,023

46. a) 0'5; b) 0'9544

47. B(500; 0,5) ~ N(250, 11,18)
a) 0,9633 b) 0
c) 0,9963

48. B(50; 0,6) → N(30; 3,46)
A) 0,9987 B) 0,5544

49. P[z<(n – 8)/2] = 0,0013→
(n – 8)/2 = –3→ n = 2 años

50. 62,2 puntos