UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima qu e le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (2 puntos) Tres amigos, Marcos, Luis y Miguel, son aficionados a la música. Entre los tres poseen un total de discos compactos (CD) comprendido entre 16 y 22. Marcos presta 4 CD a Miguel, Luis presta 1 CD a Marcos y Miguel presta 2 CD a Luis, con lo cual los tres amigos tienen ahora el mismo número de CD. ¿Cuántos CD pueden tener en total?

b) (1 punto) Si A y B son dos matrices cualesquiera, ¿es correcta la siguiente cadena de igualdades?

$$(A + B)(A - B) = A(A - B) + B(A - B) = AA - AB + BA - BB = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

Justifique la respuesta.

EJERCICIO 2

Un rectángulo mide 8 dm de largo y 4 dm de ancho. De cada esquina se recorta un cuadrado de lado x, con el fin de hacer una caja sin tapa.

a) (1 punto) Calcule el volumen de la caja en función de x.

b) (1 punto) Halle x para que el volumen sea máximo.

c) (1 punto) Halle dicho volumen.

EJERCICIO 3

Parte I

Ana, Juan y Raúl, que están esperando para realizar una consulta médica, sortean, al azar, el orden en que van a entrar.

a) (0.75 pts) Calcule la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.

b) (1.25 puntos) Determine si son independientes los sucesos S1 y S2, siendo

S1 : "la mujer entra antes que alguno de los hombres"

S2 : " los dos hombres entran consecutivamente".

Parte II

Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios, elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110.

Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una ley normal de varianza 25 y media desconocida,

a) (1 punto) ¿cuál es la distribución de la media muestral?

b) (1 punto) Determine el intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Un trabajador de una fábrica de envases de cartón hace cajas de dos tipos. Para hacer una caja del primer tipo, que vende a 12 pta, gasta 2 m de cinta adhesiva y 0.5 m de rollo de papel de cartón. Para hacer una del segundo tipo, que se vende a 8 pta, gasta 4 m de cinta adhesiva y 0.25 m del mismo rollo de papel de cartón.

Si dispone de un rollo de cinta adhesiva que tiene 440 m y otro de papel de cartón de 65 m, ¿cuántas cajas de cada tipo deben hacerse para que el valor de la producción sea máximo?

EJERCICIO 2

La siguiente función $f(x) = \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600)$

Representa el beneficio, expresado en millones de pesetas, que obtiene una empresa por la fabricación de *x* unidades de un determinado producto.

a) (1.5 puntos) Represente gráficamente dicha función.

b) (0.75 puntos) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?

c) (0.75 puntos) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo?

EJERCICIO 3

Parte I

Se dispone de un mazo de 450 fichas de estudiantes de una escuela de idiomas.

Cada estudiante cursa un solo idioma de los 3 que se imparten. El número de mujeres es 3/2 del de los hombres y los estudiantes de inglés representan el 80% del alumnado. El número de estudiantes de francés duplica al de alemán. Sea M el suceso "sacar una ficha de mujer" al extraer una ficha, al azar, del citado mazo, (análogamente, sean H, I, F y A sacar hombre, inglés, francés y alemán, respectivamente). Sabiendo que M/A es el suceso seguro y que M/F y H/F son equiprobables, determine:

a) (1.5 puntos) Probabilidad de F. Probabilidad de $M \cap I$.

b) (0.5 puntos) Probabilidad de F/M.

Parte II

(2 puntos) La variable altura de las alumnas que estudian en una escuela de idiomas sigue una distribución normal de media 1.62 m y desviación típica 0.12 m. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra aleatoria de 100 alumnas sea mayor que 1.60 m?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} b & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Suponiendo que b = 0, Halle una matriz X, de dimensión 2x2, tal que

$$X\cdot A=\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) (1.5 puntos) Suponiendo que b = 2, Halle una matriz X, de dimensión 2x2, tal que

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3-x & si \quad x\le 0 \\ x^2 & si \quad 0<x\le 2 \\ x+a & si \quad 2<x \end{cases}$, donde "$a$" es un parámetro real.

a) (0.5 puntos) Calcule el valor de "a" para que f sea continua en x = 2.
b) (1.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f cuando a = 3.
c) (1 punto) Dibuje la gráfica de la función que se obtiene cuando a = 2.

EJERCICIO 3

Parte I

(2 puntos) Se ha observado que de cada 20 recién nacidos, 11 son niños. La probabilidad de que un niño tenga los ojos azules es 0.2, mientras que la de que una niña los tenga azules es 0.3. Se elige, al azar, un recién nacido, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga los ojos azules?

Parte II

El peso de los individuos de una ciudad se distribuye según una ley normal de media desconocida y varianza 9 kg^2.
Se ha seleccionado, en esa ciudad, una muestra aleatoria que ha dado un peso medio de 65 kg.
Con una confianza del 96% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuyo límite inferior ha resultado ser 62.95 kg.
(1.25 puntos) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?
(0.75 puntos) Determine el límite superior del intervalo.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Un camión puede transportar, como máximo, 12 Tm por viaje. En cierto viaje desea transportar, al menos, 5 Tm de la mercancía A y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporte de A. Sabiendo que cobra 4 pta por kilo de mercancía A y 3 pta por kilo de mercancía B, transportadas, ¿cómo se debe cargar el camión para obtener la ganancia máxima?

EJERCICIO 2

Sea la función $f:\mathbb{R}-\{2\}\rightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3+\frac{1}{x+2}$, con $x\neq -2$.

a) (1.25 puntos) Calcule los puntos de la gráfica de dicha función donde la tangente tiene pendiente −1.
b) (0.75 puntos) Explique, razonadamente, si puede existir algún punto de tangente horizontal en esta función.
c) (1 punto) Represente gráficamente la función, indicando sus asíntotas, crecimiento y decrecimiento. A la vista de la gráfica, indique los intervalos de concavidad y convexidad.

EJERCICIO 3

Parte I

Una tienda vende frigoríficos y ha efectuado un seguimiento de los 2000 frigoríficos vendidos durante un año, obteniendo una relación del número de aparatos que han tenido alguna avería antes de los dos primeros años, según 3 tipos de marcas A, B y C:

	A	B	C
Averiada (Av)	13	4	3
No averiada (No Av)	987	396	597

a) (1 punto) Comparando P(Av/A), P(Av/B) , P(Av/C) dígase cuál de las tres marcas ha resultado ser la más segura. (Nota: P = Probabilidad)
b) (1 punto) Estudie si hay dependencia entre el suceso "tener una avería" con cada uno de los sucesos "tener una marca determinada".

Parte II

(2 puntos) La variable X se distribuye según una ley normal de media 10 y desviación típica 3. Determine el tamaño de una muestra extraída de la población, de modo que la probabilidad de que la media muestral esté por encima de 12 sea de 0.0025.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Alumnos de dos grupos distintos, A y B, realizan un mismo examen de Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. II.

Se sabe que la nota media en el grupo A ha sido de 4.5 puntos y de 5.4 puntos en el B.

Calcule el número de alumnos de cada grupo, sabiendo que los 2 grupos A y B suman 72 alumnos y que la nota media de los 72 alumnos ha sido de 4.95 puntos.

EJERCICIO 2

Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) (1 punto) $f(x)=\dfrac{2x^3}{cos(x)}$

b) (1 punto) $g(x)=\dfrac{2}{3}Ln(5x)$ (Ln: logaritmo neperiano)

c) (1 punto) $h(x)=\dfrac{1}{2}e^{5x-3}$

EJERCICIO 3

Parte I

En una urna hay 8 bolas negras y 5 bolas blancas.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que al extraer 2 bolas, con reemplazamiento, la 1ª sea negra y la 2ª blanca.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que al extraer 2 bolas, sin reemplazamiento, la 1ª sea negra y la 2ª blanca.

Parte II

(2 puntos) Sea una población formada por sólo 3 elementos con valores 2, 4 y 6. Consideremos todas las muestras, con reemplazamiento, de tamaño 2.

Calcule media y desviación típica de la población así como de las medias muestrales. ¿Qué relación hay entre ambas medias?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Determine los óptimos (máximo y mínimo) de la función objetivo z = x – y definida en la región determinada por las siguientes restricciones:

$6x + y \geq 3;\quad 2x + y \leq 2;\quad y \leq 2.5;\quad x \geq 0;\quad y \geq 0.$

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-2} & si \quad x<0 \\ 2^{2-x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad de esa función y analice su comportamiento en los posibles puntos de discontinuidad.

b) (1 punto) Calcule la función derivada de *f(x)*.

c) (1 punto) Represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3

Parte I

Una determinada enfermedad puede estar provocada por 3 causas, A, B o C, en las proporciones 30%, 20% y %0% respectivamente. (En cada enfermo solo se presenta una de estas 3 causas).

El tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 20% de los casos si está provocada por A, en el 55% si la causa es B y en el 10% si la causa es C.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo cualquiera de la citada enfermedad no necesite hospitalización?

b) (1 punto) Si un enfermo está hospitalizado, ¿cuál es la probabilidad de que la causa sea A?

Parte II

(2 puntos) Un ascensor admite como peso máximo 300 kg. La población de usuarios tiene un peso que se distribuye según una ley normal de media 70 kg y desviación típica 10 kg.

Calcule la probabilidad de que 4 personas cualesquiera de dicha población, que suban al ascensor, superen el peso máximo.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) De tres cantidades distintas: r < s < t, se sabe que la suma de las tres es igual a 113; que al dividir la mayor entre la menor se obtiene un cociente igual a 6 y un resto igual a 4, y que al dividir la mayor entre la intermedia, s, se obtiene un cociente igual a 2 y un resto igual a 6.
Calcule el valor de cada cantidad.

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2-x} & si \quad x<1 \\ 4x-x^2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad de la función.
b) (2 puntos) Represéntela gráficamente, determinando previamente: cortes con los ejes, crecimiento, extremos y asíntotas.

EJERCICIO 3

Parte I

(2 puntos) El tren español de alta velocidad, más conocido como AVE, asegura tal puntualidad, que devuelve el precio del billete a los usuarios si tiene un retraso de más de 5 minutos.
Supongamos que la probabilidad de que un tren AVE se retrase más de ese tiempo es de 0.01 cuando circula de Sevilla hacia Madrid, y de 0.017 cuando circula de Madrid a Sevilla.
Si una persona hace un viaje de ida y vuelta en un tren AVE en el recorrido mencionado, ¿cuál es la probabilidad de que le devuelvan dinero por motivos de retraso?

Parte II

Una variable aleatoria X sobre una población tiene de media 50 y de desviación típica 5.
Extraemos, aleatoriamente, de dicha población 1000 muestras. Todas ellas de tamaño 64. De cada muestra calculamos su media y llamamos A al conjunto de números formados con esas medias.
a) (1 punto) Diga, de forma razonada, qué valores se pueden esperar para la media y la desviación típica de A.
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una de esas muestras tenga una media comprendida entre 48.5 y 50.5?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Para abonar una parcela agrícola se necesitan, por lo menos, 8 kg de nitrógeno y 12 kg de fósforo. Se dispone de un producto A cuyo precio es de 30 pta/kg y que contiene un 10% de nitrógeno y un 30% de fósforo. Existe en el mercado otro producto B que contiene un 20% de nitrógeno y un 20% de fósforo y cuyo precio es de 40 pta/kg ¿Qué cantidad se debe tomar de A y B para abonar la parcela con el menor gasto posible sabiendo que, como máximo, se pueden llevar a la parcela 60 kg de producto?

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2 & si \quad x\leq 0 \\ ax+3 & si \quad 0<x\leq 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & si \quad x>2 \end{cases}$ (a: constante real)

a) (0.5 puntos) Razone si para algún valor de a la función es continua en x = 0.
b) (1 punto) Obtenga, si las hay, las asíntotas, horizontales y verticales de la función.
c) (1.5 puntos) Dibuje la gráfica de la función para a = 0.

EJERCICIO 3

Parte I

Un cruce está regulado por un semáforo. La probabilidad de que esté rojo es ½, la de que esté verde 1/3 y la de que esté en ámbar 1/6.
La probabilidad de tener que detenerse cuando está en verde es de 1/10 y la de detenerse cuando está en ámbar es 1/2. Cuando el semáforo está en rojo todos los conductores se detienen.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un conductor que pase 3 veces por dicho cruce encuentre las tres veces el semáforo en rojo.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un conductor que pase una vez tenga que detenerse por algún motivo.

Parte II

Se sabe que la desviación típica de las tallas de los alumnos de una Universidad es 6 cm.
Para estimar la talla media de dichos alumnos se toma una muestra de 64 estudiantes, resultando una media muestral de 173 cm.
a) (1 punto) Determine el intervalo de confianza de la talla media de los alumnos de la Universidad, con un nivel de confianza de 0.97.
b) (1 punto) Calcule el tamaño muestral necesario para estimar la talla media de los alumnos de la Universidad, con un nivel de confianza del 95% y un error máximo de estimación no superior a 1.2 cm.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) En un almacén caben, a lo sumo, 60 contenedores. Para atender las demandas, el almacén debe disponer, en cualquier momento, de un mínimo de 30 contenedores de zumo y 20 de leche.
Almacenar un contenedor de zumo conlleva un gasto de 40 pta mientras que el de uno de leche asciende a 80 pta.
Determine con qué número de contenedores, de zumo y de leche, se alcanza un gasto de almacenaje máximo.

EJERCICIO 2

Una empresa de automóviles ha estimado que su beneficio *B*, en millones de pesetas, depende del tiempo *t*, en minutos, que dedica diariamente a la publicidad, según la función $B(t) = -1.5t^2 + 168t - 954$

a) (1 punto) Calcule los minutos diarios que debe dedicar a publicidad para obtener un beneficio máximo. ¿Cuál es el beneficio?
b) (1 punto) Calcule en qué intervalo debe estar comprendido el tiempo diario dedicado a publicidad para que la empresa obtenga un beneficio positivo.
c) (1 punto) Dibuje la gráfica de la función $B(t)$.

EJERCICIO 3

Parte I

(2 puntos) En un grupo de alumnos, el 80% ha aprobado las Matemáticas y el 25% la Física. También se sabe que ha aprobado las Matemáticas o la Física el 85%.
Estudie si son independientes los sucesos:

M: "aprobar Matemáticas"   F: "aprobar Física"

Parte II

Un contable toma una muestra aleatoria de tamaño n = 36 de una población de 1000 cuentas por cobrar. El valor medio de las cuentas por cobrar es de 2600 pta, con una desviación típica poblacional de 450 pta.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 2500 pta.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la media muestral se encuentre a no más de 225 pta de la media de la población.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Un vendedor dispone de tres tipos de piensos: A, B y C.
A cierto ganadero le cobra 62 pta el kg de una mezcla formada por una parte de pienso de tipo A, dos de B y tres de C. A otro ganadero le cobra 48 pta el kg de una mezcla formada por dos partes de pienso de tipo A y una de tipo B.
a) (1.5 puntos) Averigüe el precio del kg de una mezcla, a partes iguales, de cada tipo de pienso.
b) (1.5 puntos) Determine el precio del kg de cada tipo de pienso, sabiendo que la mezcla, a partes iguales, de los tipos B y C cuesta 65 pta el kg.

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3e^x & si \quad -3 \le x \le 0 \\ -x^2 + 2x + 3 & si \quad 0 < x \le 3 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Represéntela gráficamente.
b) (0.5 puntos) ¿Es continua en $x = 0$?
c) (1 punto) Calcule su máximo y su mínimo, absolutos, en su dominio de definición.

EJERCICIO 3

Parte I

Una caja contiene dos monedas. Una tiene grabada cara y cruz y la otra dos caras.
Se toma de la caja, al azar, una moneda y se lanza al aire.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de obtener cara.
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara y ser moneda de dos caras?

Parte II

Se dispone de una muestra aleatoria de 10 alumnos de una población de alumnos de 3º de E.S.O.
Se sabe, por experiencias anteriores, que la altura de los alumnos de ese curso se distribuye según una variable normal de media 167 cm y desviación típica 3.2 cm.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 166 cm y la media poblacional.
b) (1 punto)¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral tenga un valor superior a 169 cm?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Indique los productos matriciales que pueden efectuarse entre ellas, sin repetir factores.
b) (1 punto) Calcule $B + C \cdot A$
c) (1 punto) Calcule el determinante de $A \cdot C$; ¿tiene inversa $A \cdot C$?

EJERCICIO 2

Una persona está aprendiendo a nadar. Después de t horas de prácticas, es capaz de nadar, en un minuto, una distancia $f(t)$ metros, dada por la función

$$f(t) = \frac{50}{3}(1 - e^{-0.04t})$$

a) (1 punto) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función.
b) (1 punto) Calcule, si existen, las asíntotas horizontales y verticales de la función f.
c) (1 punto) Con los resultados de las cuestiones anteriores ¿qué conclusiones obtiene sobre la influencia del número de horas de práctica en la distancia que recorre el nadador por minuto?

EJERCICIO 3

Parte I

Se dispone de una baraja española de 40 cartas; se saca una carta y, sin devolverla a la baraja, se saca otra.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que las dos cartas extraídas sean oros.
b) (1 punto) Sabiendo que la segunda es un oro, calcule la probabilidad de que lo haya sido también la primera.

Parte II

(2 puntos) Una máquina fabrica clavos cuya longitud sigue una distribución normal con desviación típica 0.5 mm. Se toma una muestra de 25 clavos y se obtiene una longitud media, para los mismos, de 50 mm.
Calcule un intervalo de confianza del 95% para la longitud media de la población.

CURSO 1997-1998 6

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una finca se quiere dedicar a un cultivo de secano y otro de regadío, de modo que entre los dos pueden ocupar, como máximo, 12 hectáreas pero no pueden dedicarse al regadío más de 7 hectáreas. El cultivo de secano tiene un coste de 100000 pta por hectárea, el de regadío un coste de 200000 pta por hectárea y la suma de los costes no puede ser mayor de 1600000 pta.
Si la ganancia neta de una hectárea de secano es de 1600000 pta y la de una de regadío es de 3000000 pta, encuentre la distribución de cultivos que maximiza la ganancia y calcule este máximo.

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ -x^2 + 4x & si \quad 0 < x < 4 \\ (x-4)^3 + 1 & si \quad 4 \leq x \end{cases}$

a) (1 punto) Represente gráficamente f.
b) (1.5 puntos) Estudie su continuidad y su derivabilidad.
c) (0.5 puntos) Obtenga los valores de $f'(1)$ y $f'(5)$.

EJERCICIO 3

Parte I

En una población, donde el 42% son hombres y el resto mujeres, se sabe que el 4% de los hombres y el 6% de las mujeres son inmigrantes.
a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de inmigrantes hay en esa población?
b) (1 punto) Si se elige, al azar, un inmigrante de esa población, ¿cuál será la probabilidad de que sea hombre?

Parte II

(2 puntos) Si los alumnos de preescolar de Andalucía tienen una estatura que es una variable aleatoria de media 95 cm y desviación típica 16 cm y consideramos una muestra aleatoria de 36 de tales alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esa muestra tome valores comprendidos entre 90 cm y 100 cm?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2z=-1 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$

a) (1 punto) Expréselo en forma matricial.
b) (1 punto) Calcule la matriz inversa de los coeficientes.
c) (1 punto) Resuélvalo.

EJERCICIO 2

Una compañía que fabrica bolígrafos lanza al mercado un nuevo producto. Se supone que la relación entre el precio por unidad (x) del nuevo bolígrafo y el beneficio en millones de pesetas b(x) viene expresado por la función $b(x) = -x^2 + 130x - 3000$.
a) (0.5 puntos) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada bolígrafo a 50 pta?
b) (1.5 puntos) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada bolígrafo para obtener un beneficio positivo?
c) (1 punto) Calcule a qué precio debe vender cada bolígrafo para que el beneficio sea máximo.

EJERCICIO 3

Parte I

(2 puntos) En un hospital se han producido 60 nacimientos en una semana. De ellos 35 son varones y de éstos 21 tienen el pelo negro. Asimismo, se ha observado que de las niñas nacidas 10 no tienen el pelo negro. Basándose en estos datos razone si tener el pelo negro depende, o no, del sexo.

Parte II

En una población, una variable aleatoria sigue una ley normal de media desconocida y desviación típica 20.
a) (1 punto) Si de una muestra de tamaño 25 se ha observado que la media es 2743, determine un intervalo, con el 90% de confianza, para la media de la población.
b) (1 punto) Elegida una muestra, su media ha sido 2740; se ha construido un intervalo de confianza, al 95%, que ha resultado ser (2736.08, 2743.92). ¿Cuál era el tamaño de la muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Represente gráficamente, el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$2x + y \leq 1000$; $x + 1.5y \leq 750$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

b) (1 punto) Halle sus vértices.
c) (1 punto) Obtenga el valor máximo de la función F(x, y) = 15x + 12y en el recinto anterior, así como en qué punto lo alcanza.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x < -1 \\ \frac{4}{x+3} & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 + \ln x & si \quad x > 1 \end{cases}$ (ln: logaritmo neperiano)

a) (1 punto) Estudie su continuidad.
b) (1.5 puntos) Estudie la derivabilidad, obteniendo la función derivada.
c) (0.5 puntos) Calcule, si es posible, $f'(0)$ y $f'(2)$.

EJERCICIO 3

Parte I

Una determinada población está formada, a partes iguales, por hombres y mujeres. La probabilidad de que un individuo de esa población no lea ningún periódico es 0.25. Además, el porcentaje de individuos que o bien lee algún periódico o bien son hombres es el 95%. Se elige, al azar, una persona.
a) (1 punto) Halle la probabilidad de "ser hombre y leer algún periódico".
b) (1 punto) Halle la probabilidad de que lea algún periódico, sabiendo que es hombre.

Parte II

(2 puntos) El tiempo de vida de un tipo de insecto sigue una distribución normal con media desconocida y desviación típica 25 días. Para estimar la vida media se hace un seguimiento a la duración de la vida de una muestra de n insectos. Calcule el valor de n para que el intervalo de confianza de esta vida media, con un nivel de confianza del 95%, tenga una amplitud como máximo de 5 días.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Plantee sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema: "Un comerciante ha vendido 600 camisetas por un total de 638000 pta. Su precio original era de 1200 pta por camiseta, pero ha vendido en las rebajas una parte de ellas con un descuento del 30% del precio original y otra parte con un descuento del 40%. Sabiendo que el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 1200 pta, calcular cuántas camisetas se vendieron a cada precio".

b) (2 puntos) Resuelva el sistema formado por las ecuaciones:

$$x - 2y - 3z = 1; \quad x - 4y - 5z = 1; \quad -2x + 2y + 4z = -2$$

EJERCICIO 2

Calcule las funciones derivadas de las siguientes funciones, simplificando su expresión cuando sea posible:

a) (1 punto) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x^3}$ para $x \neq 0$

b) (1 punto) $g(x) = \dfrac{1}{3}\ln(4x)$ para $x > 0$; (ln : logaritmo neperiano)

c) (1 punto) $h(x) = cos(x) \cdot sen(x)$ para $x \in \mathrm{R}$

EJERCICIO 3

Parte I

Se dispone de una baraja española de 40 cartas. Se saca una carta al azar y, sin devolverla a la baraja, se saca otra, también al azar.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ninguna de las cartas extraídas sea una figura (es decir, ni sota, ni caballo, ni rey).

b) (1 punto) Sabiendo que la segunda carta extraída no ha sido figura, calcule la probabilidad de que tampoco lo fuera la primera.

Parte II

Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal con desviación típica 90000 pta. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos 9 meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 466300 y 583900 pta.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos 9 meses?

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es el nivel de confianza de este intervalo?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Dibuje el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \leq 6; \quad y \leq 8; \quad x + y \geq 10; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

b) (1 punto) Calcule sus vértices.

c) (1 punto) Calcule el máximo de la función $F(x, y) = 20x + 60y$ en dicho recinto.

EJERCICIO 2

Los dueños de un manantial de agua mineral calculan que, si venden cada botella de agua a un precio de x pta, tendrán una ganancia diaria (en miles de pesetas):

$$g(x) = -\frac{x^2}{10} + 25x - 1500$$

a) (2 puntos) Represente gráficamente la función $g(x)$.

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es el precio con el que se alcanza el máximo de ganancia?

c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la ganancia máxima diaria que puede obtenerse?

EJERCICIO 3

Parte I

La probabilidad de que un conductor no lleve la rueda de repuesto es 0.13 y la de que no lleve lámparas de repuesto es 0.37. Se sabe que el 60% de los conductores llevan ambos repuestos.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un conductor no lleve alguno de los repuestos señalados.

b) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos "llevar rueda de repuesto" y "llevar lámparas de repuesto"?

Parte II

La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1.75 metros. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 0.16$ m^2.

a) (1 punto) Construya un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.

b) (1 punto) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de la población de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con una confianza del 90%?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$x + y \le 27$; $x \ge 12$; $y \ge 6$.

b) (1 punto) Determine los vértices de este recinto.

c) (1 punto) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función F (x, y) = 90x + 60y en el recinto anterior y en qué puntos alcanza dichos valores?

EJERCICIO 2

De dos funciones *f* y *g*, se sabe que la representación gráfica de sus funciones derivadas es una recta que pasa por los puntos (0, 2) y (2, 0) (para la derivada de *f*) y una parábola que corta al eje OX en (0, 0) y (4, 0) y tiene vértice (2, 1) (para la derivada de *g*). Utilizando las gráficas de tales derivadas:

a) (2 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de *f* y *g*.

b) (1 punto) Determine, si existen, máximos y mínimos de *f* y *g*.

EJERCICIO 3

Parte I

Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.

a) (1 punto) Escriba el espacio muestral asociado a dicho experimento, utilizando la letra "s" para las respuestas afirmativas y la "n" para las negativas.

b) (0.5 puntos) ¿Qué elementos del espacio muestral constituyen el suceso "al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto"?

c) (0.5 puntos) Describa el suceso contrario de "más de una persona es partidaria de consumir el producto".

Parte II

Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cc. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cc.

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.

b) (0.5 puntos) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

En una tienda, un cliente se ha gastado 15000 pta en la compra de 12 artículos entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado 2000 pta y cada carpeta 500 pta. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros.

a) (1.5 puntos) Formule el sistema asociado al enunciado anterior.

b) (1.5 puntos) Determine cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

EJERCICIO 2

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & si \quad x < -1 \\ 2x + 2 & si \quad -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie su continuidad y su derivabilidad.

b) (1 punto) Represente gráficamente la función y, a la vista de su gráfica, determine sus máximos y mínimos relativos, así como el crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 3

Parte I

En un supermercado, el 70% de las compras las realizan las mujeres,; de las compras realizadas por éstas, el 80% supera las 2000 pta, mientras que de las compras realizadas por hombres sólo el 30% supera esa cantidad.

a) (1 punto) Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere las 2000 pta?

b) (1 punto) Si se sabe que un ticket de compra no supera las 2000 pta, ¿cuál es la probabilidad de que la compra haya sido realizada por una mujer?

Parte II

La media de edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la Universidad es 18.1 años y la desviación típica 0.6 años.

a) (1 punto) De los alumnos anteriores se elige, al azar, una muestra de 100, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra esté comprendida entre 17.9 y 18.2 años?

b) (1 punto) ¿Qué tamaño debe tener una muestra de dicha población para que su media esté comprendida entre 17.9 y 18.3 años, con una confianza del 99.5 %?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (2 puntos) Una heladería prepara helados de tres tamaños, 125 g, 250 g y 500 g, cuyos precios son 150 pta, 270 pta y 495 pta, respectivamente. Un cliente compra 10 helados, con un peso total de 2.5 kg, y paga por ellos 2670 pta. Se desea conocer el número de helados que ha comprado de cada tipo.
Formule el sistema de ecuaciones asociado al enunciado del problema.
Halle el número de helados que se lleva de cada tipo.

b) (1 punto) Dada la matriz : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ halle A^{200}.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\dfrac{320x+25}{2x+5}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad de f y calcule su función derivada f'.
b) (0.5 puntos) Razone si existen o no extremos relativos de la función f.
c) (1.5 puntos) Calcule las asíntotas de dicha función.

EJERCICIO 3

Parte I

(2 puntos) Disponemos de 3 urnas y de 10 bolas, 5 blancas y 5 negras. Distribuimos las bolas de la siguiente manera:

En la 1ª urna ponemos 1 bola blanca y 1 bola negra.
En la 2ª urna ponemos 3 bolas blancas y 2 bolas negras.
En la 3ª urna ponemos 1 bola blanca y 2 bolas negras.

De una de las urnas, elegida al azar, se extrae una bola. Halle la probabilidad de que la bola elegida sea negra.

Parte II

(2 puntos) Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es 90 horas. Tomada una muestra de tamaño 100 se ha encontrado que la media de la duración de las bombillas ha sido 1200 horas. Determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la duración media de las bombillas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Un agricultor cosecha garbanzos y lentejas. Se sabe que, a lo sumo, sólo se pueden cosechar 500 toneladas métricas (Tm), de las que como máximo 200 Tm son lentejas. Los beneficios por Tm de garbanzos y lentejas son 50000 pta y 30000 pta respectivamente, y desea planificar la producción para optimizar el beneficio total.

a) (1 punto) Formule el sistema de inecuaciones asociado al enunciado del problema y la función objetivo del mismo.
b) (1 punto) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
c) (1 punto) ¿Cuántas Tm de garbanzos y cuántas de lentejas debe cosechar para obtener el máximo beneficio?

EJERCICIO 2

a) (1.5 puntos) La gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(-1, 0)$ y tiene un máximo relativo en el punto $(0, 4)$. Halle los coeficientes a, b y c.
b) (1.5 puntos) Obtenga los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$.

EJERCICIO 3

Parte I

Tenemos tres cajas de bombones, A, B y C. La caja A contiene 10 bombones, de los cuales 4 están rellenos; la caja B contiene 8 bombones, de los cuales 3 están rellenos y la caja C contiene 6 bombones, de los que 1 está relleno.

a) (0.5 puntos) Si tomamos al azar un bombón de la caja A, ¿cuál es la probabilidad de que no esté relleno?
b) (1.5 puntos) Si elegimos al azar una de las tres cajas y tomamos un bombón de la caja elegida, ¿cuál es la probabilidad de que esté relleno?

Parte II

Sea un conjunto de cuatro bolas, marcadas con los números 1, 3, 5 y 7.

a) (1 punto) Escriba todas las muestras de tamaño 2 que podrían formarse con esas bolas si el muestreo se hace sin reposición; calcule las medias de los números de cada muestra y halle la media de todas esas medias.
b) (1 punto) Haga lo mismo que en a) pero suponiendo que el muestreo se hace con reemplazamiento.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Compruebe que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (t indica traspuesta).

b) (1.5 puntos) Halle una matriz X que verifique: $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Los ingresos $I(x)$ y los costes $C(x)$, en millones de pesetas, de una fábrica de bolígrafos, dependen del precio de venta x de cada bolígrafo (en pesetas) según las funciones:

$I(x) = 4x - 9$ y $C(x) = 0.01x^2 + 3x$

El beneficio anual es $B(x) = I(x) - C(x)$

a) (1 punto) ¿Cuál debe ser el precio de venta para obtener el máximo beneficio?

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es ese beneficio máximo?

c) (1 punto) Represente gráficamente la función beneficio.

d) (0.5 puntos) Razone (sobre la gráfica o con la función $B(x)$) para qué precios de venta tendría pérdidas esta empresa.

EJERCICIO 3

Parte I

A un congreso médico asisten oculistas y pediatras. Sabemos que 240 médicos son andaluces, 135 navarros y 225 son canarios. El número total de pediatras es 315. De los andaluces, 96 son oculistas y, de los navarros, son oculistas 75.

a) (0.75 puntos) Escogemos un asistente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un pediatra navarro?

b) (0.75 puntos) Hemos elegido un médico canario, ¿cuál es la probabilidad de que sea oculista?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "ser andaluz" y "ser oculista"?

Parte II

(2 puntos) Al calificar los exámenes de un numeroso grupo de opositores, se ha visto que sus puntuaciones siguen una distribución normal con una media de 72 puntos y una desviación típica de 9 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 16 de esos opositores, elegidos al azar, se obtenga una puntuación media superior a 78 puntos?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Represente gráficamente el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones: $x + y \leq 11$; $40x + 30y \geq 360$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

b) (1 punto) Calcule los vértices de ese recinto.

c) (1 punto) Obtenga en dicho recinto el valor máximo y el mínimo de la función dada por $F(x, y) = 10000x + 7000y$, y diga en qué puntos se alcanzan.

EJERCICIO 2

Siendo $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por la expresión: $f(x) = \begin{cases} 3x + 5a & si \quad x < 0 \\ bx^2 + 3 & si \quad 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & si \quad 2 \leq x \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Estudie la continuidad de f según los valores de las constantes a y b.

b) (1 punto) Represente la gráfica de esta función para $a = 1$, $b = -1$ e indique los intervalos de crecimiento de dicha gráfica.

c) (0.5 puntos) Justifique si la función del apartado b) presenta, en el intervalo $(2, +\infty)$ algún punto de tangente horizontal.

EJERCICIO 3

Parte I

(2 puntos) En un espacio muestral dado se consideran dos sucesos A y B tales que su unión es el suceso seguro y las probabilidades condicionadas entre ellos valen $P(A/B) = \frac{1}{2}$ y $P(B/A) = \frac{1}{3}$. Halle las probabilidades de los sucesos A y B.

Parte II

(2 puntos) El tiempo que permanece cada paciente en la consulta de cierto médico es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 minutos.

Se ha tomado una muestra aleatoria de 256 pacientes de este médico y se ha encontrado que su tiempo medio de consulta ha sido de 10 minutos. ¿Cuál es el intervalo de confianza, a un nivel del 95%, para el tiempo medio de consulta que se deduce de esta muestra?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Dibuje el recinto limitado por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \geq 2; \quad x - y \leq 0; \quad y \leq 4; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

b) (1 punto) Calcule los vértices de ese recinto.

c) (1 punto) Determine el máximo y el mínimo de la función $F(x, y)= 12x+ 4y$ en el recinto anterior.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)= x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) (2 puntos) Determine el valor que deben tomar los parámetros a, b y c para que $f(x)$ tenga un máximo en x = 1, un punto de inflexión en x = 2 y corte al eje OY en el punto de ordenada –1.

b) (1 punto) Represente, gráficamente, la función $g(x) = x^3 - 3x$, determinando los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos.

EJERCICIO 3

Parte I

El 40% de los habitantes de una ciudad va al cine, el 30% va al teatro y el 20% a ambos.

a) (1 punto) Si una persona de esa ciudad no va al cine, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco vaya al teatro?

b) (1 punto) Si una persona no va al teatro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya al cine?

Parte II

Se sabe que el tiempo, de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley normal de media desconocida y desviación típica 0.15 segundos.

Observada una muestra de tamaño 9, se ha obtenido una media muestral de 0.85 s.

a) (1 punto) Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 99%.

b) (1 punto) ¿Con qué nivel de confianza se debería construir un intervalo para la media de manera que los límites de dicho intervalo fuesen 0.768 y 0.932?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + my + z &= 4 \\ x + 3y + z &= 5 \\ mx + y + z &= 4 \end{aligned}$$

a) (1.5 puntos) Resuélvalo y clasifíquelo para $m = 1$.

b) (1.5 puntos) Resuélvalo y clasifíquelo para $m = 2$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida, a trozos, de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & si \quad x \leq 1 \\ 4 & si \quad 1 < x \leq 3 \\ (x-4)^2 + 2 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

a) (1.25 puntos) Represéntela gráficamente.

b) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de f.

c) (1 punto) Estudie la derivabilidad de f.

EJERCICIO 3

Parte I

En un centro de enseñanza secundaria se sabe que el 70% de los alumnos practican atletismo, que el 50% juega al fútbol, y que el 40% de los que practican atletismo juega al fútbol.

a) (0.75 puntos) Razone si los sucesos "jugar al fútbol" y "practicar atletismo" son independientes.

b) (1.25 puntos) Si se elige al azar un alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que no participe en ninguno de estos deportes?

Parte II

(2 puntos) En un colegio hay 2000 alumnos distribuidos en 5 cursos así: 400 en 1er curso, 380 en 2º, 520 en 3º, 360 en 4º y 340 en 5º.

Se quiere seleccionar una muestra de 100 alumnos, utilizando la técnica de muestreo aleatorio con afijación proporcional y considerando cada curso como un estrato. ¿Cómo se seleccionaría dicha muestra?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (2 puntos) Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones:

$5x + y \leq 5;\quad 9y - 2x \geq 0;\quad x + 2y \geq 2;\quad x \geq 0$

y determine sus vértices.

b) (1 punto) Determine, en ese recinto, los puntos donde la función $F(x, y) = 6x + y - 3$ toma los valores máximo y mínimo.

EJERCICIO 2

El beneficio de una empresa viene dado por la función $f(x) = \frac{225}{2} + 20x - \frac{1}{2}x^2$, donde x representa el gasto en publicidad.

a) (0.5 puntos) Calcule el gasto x a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esa función.

c) (1 punto) Represente gráficamente la función f.

d) (0.5 puntos) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio máximo?

EJERCICIO 3

Parte 1

En un conjunto de estudiantes el 15% estudia alemán, el 30% estudia francés y el 10% ambas materias.

a) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos "estudiar alemán" y "estudiar francés"? Justifique la respuesta.

b) (1 punto) Si se elige un estudiante al azar, calcule la probabilidad de que no estudie ni francés ni alemán.

Parte 2

A 400 personas elegidas al azar se les ha preguntado su gasto anual en libros, obteniéndose una cantidad media de 22000 pta. Con independencia de esta muestra se sabe que la desviación típica de la inversión en libros en la población es de 4000 pta.

a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza al 90% y centrado, para la media poblacional de esta inversión.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese (21904, 22096)?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial: $A \cdot X + 2B = A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

b) (1 punto) Calcule la matriz A^{2000}.

EJERCICIO 2

Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < 2 \\ x^2 - 8x + 17 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) (1.75 puntos) Represéntela gráficamente y estudie su continuidad y derivabilidad.

b) (0.75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

c) (0.5 puntos) Los extremos hallados anteriormente, ¿son puntos donde $f'(x) = 0$? Razone la respuesta.

EJERCICIO 3

Parte 1

Un ladrón, al huir de un policía, puede hacerlo por las calles A, B o C, con probabilidades P(A) = 0.25, P(B) = 0.6 y P(C) = 0.15, respectivamente. La probabilidad de ser alcanzado si huye por la calle A es 0.4, si huye por la calle B es 0.5, y si huye por la calle C es 0.6.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el policía alcance al ladrón.

b) (1 punto) Si el ladrón ha sido alcanzado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la calle A?

Parte 2

Una máquina que envasa aceite en garrafas de 5 litros está ajustada de manera que la cantidad que llena sigue una ley normal con desviación típica s = 0.15 litros.

a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media del contenido de las garrafas que llena esta máquina sabiendo que una muestra aleatoria de 36 de ellas dio un contenido medio de 4.97 litros.

b) (0.5 puntos) ¿Contienen las garrafas 5 litros de aceite?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Determine las matrices: $A = M^{-1}$; $B = 2M - M^t$.
b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación: $X \cdot M + B = I_2$.
(M^t indica transpuesta de M; I_2 indica matriz unidad de orden 2)

EJERCICIO 2

La derivada de una función f definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es: $f'(x) = x^2 + x - 6$.
a) (1 punto) Determine, si es posible, para qué valores de x alcanza f su máximo y su mínimo relativos.
b) (1 punto) Calcule un punto de inflexión de esta función y determine si es único o pueden existir otros.
c) (1 punto) Sabiendo que $f(0) = 3$, deduzca razonadamente si es $f(1) < 3$ o es $f(1) > 3$.

EJERCICIO 3

Parte 1

La tabla adjunta muestra los resultados de una encuesta realizada entre varias personas con estudios primarios (P), medios (M) y superiores (S), sobre la pregunta de si fuman (F) o no fuman (F^C).

	P	M	S
F	190	120	12
F^C	60	280	138

Según los datos de esta tabla:
a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona encuestada con estudios primarios fume? ¿Y si tiene estudios superiores?
b) (0.75 puntos) ¿Son independientes los sucesos "tener estudios superiores" y "no fumar"?
c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona encuestada que fume no tenga estudios superiores?

Parte 2

(2 puntos) El tiempo de reacción de un automovilista ante un obstáculo inesperado sigue una distribución normal con desviación típica de 0.1 segundos. Deduzca el tamaño con el que ha de tomarse una muestra para tener una confianza del 90% de que el error de estimación del tiempo medio de reacción no supere 0.02 segundos.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) El triángulo limitado por las rectas: $2x = 7$; $5y - 4x = 11$; $2x + 5y = 17$, representa la solución de un cierto sistema de inecuaciones lineales. Determine este sistema de inecuaciones.
b) (1 punto) Calcule los puntos del recinto anterior en los que la función $F(x, y) = 2x + 7y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.
c) (0.5 puntos) Encuentre dichos valores máximo y mínimo.

EJERCICIO 2

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{4} & si\ 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{1}{x} & si\ 2 < x \end{cases}$

a) (1 punto) Dibuje la gráfica de esta función.
b) (2 puntos) Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos.

EJERCICIO 3

Parte 1

De entre los alumnos que cursan 2º curso del Bachillerato de Ciencias de la Salud, el 80% elige Estadística como optativa y el resto Matemáticas II. No hay alumnos que cursen las dos materias a la vez. El 40% de los alumnos que eligen Estadística supera el curso, mientras que de los que eligen Matemáticas II el 55% supera el curso.
a) (1 punto) Elegido un alumno al azar, calcule la probabilidad de que supere el curso.
b) (1 punto) Si un alumno ha superado el curso, calcule la probabilidad de que haya elegido Estadística.

Parte 2

(2 puntos) Sea la población $\{-1, -2, 3, 4\}$. Forme todas las muestras, sin reemplazamiento, de tamaño 2 y calcule la media y varianza de las medias muestrales, comparando los resultados obtenidos con la media y varianza de la población.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{aligned} 2x + y + mz &= -2 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + my - 2z &= -4 \end{aligned}$$
calcule, para $m = +1$, la inversa de la matriz de coeficientes.

b) (1.5 puntos) Resuelva, para $m = -1$, el sistema del apartado anterior.

EJERCICIO 2

El precio en Bolsa de las acciones de una empresa durante las cinco horas que dura una jornada bursátil, medido en pesetas, viene dado por la función C: $[0,5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida así: $C(t) = 100\,(t^2 - 6t + 25)$, donde t representa el tiempo medido en horas.

a) (1.5 puntos) Dibuje la gráfica de C, indicando las subidas y bajadas en el precio de cada acción durante la sesión, así como su precio en el instante inicial.

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que alcanzan las acciones a lo largo de la jornada?

c) (0.5 puntos) Si la sesión bursátil durara tres horas más y se rigiera por la misma función, ¿cuál sería la tendencia en el precio de las acciones? ¿Cuál sería la cotización al cabo de las ocho horas?

EJERCICIO 3

Parte 1

En un famoso concurso de televisión basta con responder acertadamente a 15 preguntas para ganar 50 millones de pesetas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas, de las que sólo una es verdadera.

a) (1 punto) Determine la probabilidad de que un concursante que no sabe ninguna pregunta y responde al azar pueda ganar los 50 millones.

b) (1 punto) Determine la probabilidad de que un concursante con cultura media que sólo conoce las respuestas correctas de las 5 primeras preguntas, acierte las respuestas de las 10 últimas si éstas las contesta al azar.

Parte 2

La duración de los matrimonios en un país se distribuye según una ley normal con desviación típica 4.8 años.

a) (1 punto) Si se toma una muestra de 64 matrimonios cuya media es 16 años, halle un intervalo de confianza al 95% para la media de la población.

b) (1 punto) Si sabemos que la media poblacional es 15, ¿cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 100 sea superior a 16.35 años?

CURSO 1999-2000 3

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea el recinto definido por las inecuaciones:
$$\begin{aligned} 2y &\geq x + 3 \\ -y &\geq -x \\ x &\leq 5 \end{aligned}.$$

a) (1 punto) Represéntelo gráficamente.

b) (1 punto) Calcule sus vértices.

c) (1 punto) ¿En qué puntos del recinto alcanza la función $F(x, y) = -2x + y - 1$ sus valores extremos?

EJERCICIO 2

Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & si \quad x < 2 \\ -x + 4 & si \quad 2 \leq x < 4 \\ (x-4)^2 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Represéntela gráficamente.

c) (1 punto) Halle sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 3

Parte 1

El 80% de los alumnos de un IES son aficionados al fútbol y el 60% al cine; la mitad de los alumnos de ese IES lo son a las dos cosas. Se elige al azar un alumno:

a) (1 punto) Halle la probabilidad de que no sea aficionado a ninguna de las dos cosas.

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionado al cine sabiendo que no es aficionado al fútbol?

Parte 2

En una muestra aleatoria de 225 individuos se ha obtenido una media de edad de 16.5 años. Se sabe que la desviación típica de la población de la que procede esa muestra es de 0.7 años.

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la edad media de la población.

b) (0.5 puntos) ¿Qué error se comete en la estimación anterior?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

La región factible de un problema de programación lineal es la intersección del primer cuadrante con los 3 semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x}{10}+\frac{y}{8}\leq 1 \quad ; \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{8}\geq 1 \quad ; \quad \frac{x}{10}+\frac{y}{4}\geq 1$$

a) (2 puntos) Dibuje dicha región y determine sus vértices.

b) (1 punto) Calcule el mínimo de la función objetivo F(x, y) = 4x + 5y en el recinto anterior.

EJERCICIO 2

a) (1 punto) Calcule la derivada de cada una de las funciones: $g(x)=\dfrac{-1}{x}$; $h(x)=x\cdot\text{sen}(x)$

b) (2 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función cuya función derivada viene dada gráficamente por la recta que pasa por los puntos (–1, 0) y (0, 1).

EJERCICIO 3

Parte 1

En un Instituto se ofertan tres modalidades excluyentes A, B y C y dos idiomas excluyentes, Inglés y Francés. La modalidad A es elegida por un 50% de alumnos, la B por un 30% y la C por un 20%. También se conoce que han elegido Inglés el 80% de los alumnos de la modalidad A, el 90% de la modalidad B y el 75% de la C, habiendo elegido Francés el resto de los alumnos.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de estudiantes del Instituto ha elegido Francés?

b) (1 punto) Si se elige al azar un estudiante de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?

Parte 2

La altura de los jóvenes andaluces se distribuye según una ley normal de media desconocida y varianza 25 cm^2.

Se ha seleccionado una muestra aleatoria y con una confianza del 95% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuya amplitud es de 2.45 cm.

a) (1 punto) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?

b) (1 punto) Determine el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la muestra tomada dio una altura media de 170 cm.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se considera el sistema: $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

a) (2 puntos) Resuélvalo y clasifíquelo en función del número de soluciones.

b) (1 punto) Determine si es posible, o no, eliminar una de las ecuaciones, de forma que el sistema que resulte sea equivalente al anterior. Razone la respuesta.

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+a & si \quad x\leq -1 \\ -x^2+2 & si \quad -1<x\leq 1 \\ Lx & si \quad x>1 \end{cases}$ (L indica logaritmo neperiano)

a) (1 punto) Calcule el valor de "*a*" para que f sea continua en x = –1.

b) (1 punto) Represente gráficamente la función anterior si *a* = 3.

c) (1 punto) Justifique la existencia o no de derivada en los puntos *x* = –1 y *x* = 1 para la función obtenida en el apartado anterior.

EJERCICIO 3

Parte 1

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que P(A) = 0.7, P(B) = 0.6 y $P(A\cap B) = 0.9$.

a) (1 punto) Justifique si A y B son independientes.

b) (1 punto) Calcule $P(A/B^C)$ y $P(B/A^C)$; A^C y B^C indican los contrarios de A y B.

Parte 2

Se conoce que el número de días de permanencia de los enfermos de un hospital sigue una distribución normal de media 8.1 días y desviación típica 9 días. Se elige, al azar, una muestra de 100 enfermos:

a) (1 punto) Razone cuál es la distribución de la media muestral.

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 8 y 10 días?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule $A \cdot A^T$; donde A^T indica la matriz transpuesta de A.
b) (1 punto) Halle la matriz inversa de A para $a = 8$.
c) (1 punto) ¿Tiene inversa A cuando $a = 7$?

EJERCICIO 2

a) (1.5 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, calcule a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $(-1, 2)$.
b) (1.5 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3.

EJERCICIO 3

Parte 1

Dos sucesos A y B son tales que $P(A) = 0.30$, $P(B/A) = 0.10$ y $P((A\cap B)^C) = 0.63$, donde $(A\cap B)^C$ indica el contrario de $A\cap B$.
a) (1.5 puntos) ¿Es A independiente de B? ¿Es B independiente de A?
b) (0.5 puntos) Calcule $P(A^C\cap B^C)$; donde A^C y B^C indican los contrarios de A y B.

Parte 2

Una población está formada por los 4 números siguientes: 3, 7, 11, 15.
a) (0.5 puntos) Encuentre todas las muestras posibles, con reemplazamiento, de tamaño 2.
b) (1 punto) Halle la media y la desviación típica de la distribución muestral de medias.
c) (0.5 puntos) Halle la media y la desviación típica de la población.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea el recinto definido por las inecuaciones:

$$x \le \tfrac{1}{3}(x + y);\quad x + y \le 18;\quad y \le 15;\quad x \ge 0$$

a) (2 puntos) Represente dicho recinto y determine sus vértices.
b) (1 punto) Encuentre el punto de éste donde se hace mínima la función $F(x, y) = 80x + 100\cdot(15 - y)$. ¿Cuál es ese valor mínimo?

EJERCICIO 2

Sea f(x) = $\begin{cases} 2^x & si \quad x \le -1 \\ -x^2+3 & si \quad -1 < x < 2 \\ x-3 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$

a) (2 puntos) Represente gráficamente la función y, a la vista de su gráfica, determine sus máximos y mínimos relativos, así como su crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.

EJERCICIO 3

Parte 1

En una clase el 60% de los alumnos aprobó Historia y la mitad de la clase aprobó Inglés. Se sabe que el 70% de los alumnos que aprobaron Historia aprobó Inglés.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un alumno cualquiera de la citada clase apruebe al menos una de las dos asignaturas.
b) (0.5 puntos) Calcule el porcentaje de los alumnos que, habiendo aprobado Inglés, aprueban Historia.
c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “aprobar Historia” y “aprobar Inglés”? Razone la respuesta.

Parte 2

Se sabe que el intervalo (2.9, 3.7) es un intervalo de confianza al 95% para el peso medio, en kilogramos, de los recién nacidos en el año 1999, elaborado a partir de una muestra de 200 de ellos.
a) (1 punto) Comente razonadamente si se puede deducir del intervalo de confianza dado la siguiente afirmación: “el peso medio de los recién nacidos del año 1999 es seguro que está entre 2.9 y 3.7 kilogramos”.
b) (1 punto) ¿Qué se podría hacer para tener un intervalo de confianza más pequeño?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (2 puntos) Represente y calcule los vértices de la región determinada por las inecuaciones siguientes: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $y - x \leq 2$; $y - x \geq -1$; $2y + x \leq 7$.

b) (1 punto) Calcule el valor máximo de la función $F(x, y) = 2x + 3y$ en la región anterior y el punto donde lo alcanza.

EJERCICIO 2

Se considera la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x+1} & si \quad x < -2 \\ -x^2 - 2x + a & si \quad -2 \leq x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & si \quad 0 \leq x \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Halle el valor de a para que f sea continua. Para dicho valor de a, ¿es f derivable?

b) (1.5 puntos) Para el caso de $a = 2$, dibuje la gráfica de f.

EJERCICIO 3

Parte 1

(2 puntos) La población española está compuesta por un 55% de mujeres, de las que un 8% ha realizado en alguna ocasión una compra por Internet. Se sabe que la probabilidad de que una persona haya comprado alguna vez usando Internet es 0.3. Halle la probabilidad de que un hombre, elegido al azar, haya comprado alguna vez por Internet.

Parte 2

Las notas de un examen se distribuyen según una ley normal de media 5.6 y varianza 9. Seleccionamos al azar 16 estudiantes y calculamos la media de sus notas.

a) (1.5 puntos) Calcule la probabilidad de que dicha media esté comprendida entre 4.7 y 6.5.

b) (0.5 puntos) Si en lugar de seleccionar 16 estudiantes, seleccionamos 25, ¿aumentará o disminuirá la probabilidad calculada en el apartado anterior? Razone la respuesta.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema: "Una empresa de repostería tiene 10 vehículos entre motocicletas (2 ruedas), turismos (4 ruedas) y pequeños camiones de reparto (6 ruedas). El impuesto municipal, por vehículo, es de 2000 pta, 5000 pta y 8000 pta, respectivamente. Sabiendo que ha pagado un total de 41000 pta por este concepto y que el total de ruedas de sus vehículos es de 34, ¿cuántos vehículos tiene de cada tipo?"

b) (1.5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, halle $A + A^{-1}$.

EJERCICIO 2

La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión:

$$f(t) = \frac{5t}{2} - \frac{t^2}{2}$$

a) (1 punto) Represente gráficamente f.

b) (1 punto) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 4 segundos? ¿Al cabo de cuánto tiempo llegará al suelo?

c) (1 punto) ¿En qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?

EJERCICIO 3

Parte 1

De una lista de 10 personas, de las que 7 son hombres, seleccionamos 2 personas al azar. Calcule la probabilidad de que sean de distinto sexo en los siguientes casos:

a) (1 punto) Se eligen sin reemplazo.

b) (1 punto) Se eligen con reemplazo.

Parte 2

En una población, una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 12.

a) (1 punto) Si en una muestra de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la media es 40, determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la media de la población.

b) (1 punto) Con un nivel de confianza del 90% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuyo límite inferior ha sido 36.71. ¿Qué tamaño de muestra se ha tomado en este caso?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & - & 2z & = & 3 \\ x & & & - & z & = & 1 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$.

(0.5 puntos) Expréselo en forma matricial.
(0.5 puntos) ¿La matriz de los coeficientes posee inversa? Justifique la respuesta.
(2 puntos) Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto al número de soluciones.

EJERCICIO 2

Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x)=\dfrac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x \geq 0$.
(2 puntos) Represente gráficamente la función $y = f(x)$, para $x \in (-\infty, +\infty)$, indicando: dominio, corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento.
(0.5 puntos) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?
(0.5 puntos) A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

EJERCICIO 3

Parte I

Una caja contiene diez tornillos, de los que dos son defectuosos.
(1 punto) Si vamos extrayendo tornillos, uno tras otro, hasta localizar los dos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de necesitar exactamente tres extracciones para localizarlos?
(1 punto) Si extraemos solo dos tornillos, y el segundo ha resultado ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el primero también lo haya sido?

Parte II

(2 puntos) Según un estudio sociológico, el gasto mensual de los jóvenes españoles durante los fines de semana se distribuye según una ley normal de media $\mu = 25000$ pta y desviación típica $\sigma = 3000$ pta. Tomamos, al azar, una muestra de 36 jóvenes.
¿Cuál es la probabilidad de que esta muestra tenga un gasto medio comprendido entre 23800 pta y 26200 pta?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Cierta sala de espectáculos tiene una capacidad máxima de 1500 personas, entre adultos y niños; el número de niños asistentes no puede superar los 600. El precio de la entrada a una sesión de un adulto es de 800 pta, mientras que la de un niño es de un 40 % menos. El número de adultos no puede superar al doble del número de niños.
Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de entradas? ¿Cuántas de las entradas serán de niños?

EJERCICIO 2

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2-2 & si\ \ x\leq -2 \\ a & si\ \ -2<x\leq 2 \\ x & si\ \ x>2 \end{cases}$ $(a \in \mathrm{R})$.

(1 punto) Calcule el valor de "a" para que f sea continua en $x = -2$.
(1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f cuando $a = 2$.
(1 punto) Dibuje la gráfica de la función que se obtiene cuando $a = 2$.

EJERCICIO 3

Parte I

Disponemos de tres dados, uno de los cuales está trucado. La probabilidad de sacar 5 con el dado trucado es 0.25 siendo los otros resultados equiprobables. Se elige un dado al azar y se realiza un lanzamiento con él.
(1 punto) Determine la probabilidad de obtener un 2.
(1 punto) Dado que ha salido un 2, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos elegido el dado trucado?

Parte II

(2 puntos) Sabiendo que la varianza de una ley normal es $\sigma^2 = 16$, determine el nivel de confianza con el que puede decirse que su media μ está comprendida entre 6.2 y 8.8, si se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 de esa ley normal, cuya media muestral es 7.5.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 4 millones de pta y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje; la contratación de uno del tipo B cuesta 1 millón de pta y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje.
¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & si\ \ x<0 \\ x^2-x & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.

(1 punto) Represéntela gráficamente.
(0.5 puntos) Estudie su continuidad.
(1 punto) Obtenga, si existe, la derivada de f en $x = 1/2$, $x = -1/2$ y $x = 0$.
(0.5 puntos) Indique si posee máximos y mínimos relativos y en qué puntos.

EJERCICIO 3

Parte I

En una ciudad el 60 % de sus habitantes son aficionados al fútbol, el 30 % son aficionados al baloncesto y el 25 % a ambos deportes.
(0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “ser aficionado al fútbol” y “ser aficionado al baloncesto”?.
(0.75 puntos) Si una persona no es aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no sea aficionada al baloncesto?
(0.75 puntos) Si una persona no es aficionada al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que sea aficionada al fútbol?

Parte II

(2 puntos) El periodo de funcionamiento de las bombillas de una determinada marca sigue una distribución normal de media 360 días y desviación típica 40 días.
Queremos elegir una muestra de bombillas de esa marca cuyo periodo medio de funcionamiento sea superior a 330 días, con probabilidad 0.97.
Calcule el tamaño mínimo de la muestra.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(2 puntos) Determine dos números sabiendo que al dividir el mayor por el menor obtenemos 7 de cociente y 2 de resto, y que la diferencia entre el triple del mayor y el menor es 106.
(1 punto) Resuelva el siguiente sistema e interprete gráficamente sus soluciones:

$$2x-y=5$$
$$4(x-2)=1+2(y+1).$$

EJERCICIO 2

El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de pesetas produce una ganancia de f(x) millones de pts, siendo:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & si\ \ 0\leq x\leq 5 \\ \dfrac{5}{2x} & si\ \ x>5 \end{cases}.$$

(1 punto) Represente la función $f(x)$.
(0.75 puntos) Halle la inversión que produce máxima ganancia.
(0.75 puntos) Halle el valor de la inversión que produce ganancia nula.
(0.5 puntos) Razone lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinidamente.

EJERCICIO 3

Parte I

Tenemos un cofre A con 2 monedas de oro y 3 de plata, un cofre B con 5 monedas de oro y 4 de plata y un tercer cofre C con 2 monedas de oro. Elegimos un cofre al azar y sacamos una moneda.
(1 punto) Calcule la probabilidad de que sea de oro.
(1 punto) Sabiendo que ha sido de plata, calcule la probabilidad de que haya sido extraída del cofre A.

Parte II

En los individuos de una población, la cantidad de colesterol en sangre se distribuye según una ley normal de media desconocida y desviación típica de 0.5 g/l. Hemos tomado una muestra de 10 individuos, y se ha obtenido una media muestral de 1.7 g/l.
(1 punto) Obtenga un intervalo de confianza, al 95 %, para la cantidad media de colesterol en sangre de la población.
(1 punto) ¿Qué nivel de confianza tendría un intervalo para la media cuyos límites fuesen 1.2930 y 2.107?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(1 punto) Un establecimiento pone a la venta tres tipos de camisas A, B y C. Se sabe que la razón entre los precios de las camisas C y B es 19/18 y entre los de B y A es 6/5. Al comprar tres camisas, una de cada clase, se pagan 13000 pta. Plantee el sistema de ecuaciones que permita conocer el precio de cada camisa.

(2 puntos) Siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, razone si posee solución la ecuación matricial A·X = B y, en caso afirmativo, resuélvala.

EJERCICIO 2

Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "h" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "t" (en segundos) viene dada por la expresión: $h(t) = -5t^2 + 40t$.

(0.75 puntos) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

(1 punto) Represente gráficamente la función $h(t)$.

(0.75 puntos) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

(0.5 puntos) ¿En qué instante llega al suelo?

EJERCICIO 3

Parte I

Sean A y B dos sucesos tales que P(A) = $\frac{1}{2}$, P(B) = $\frac{1}{3}$ y P(A∩B) = $\frac{1}{4}$. Calcule:

(0.5 puntos) P(A/B) y P(B/A).

(0.75 puntos) P(A∪B).

(0.75 puntos) $P(A^C \cap B)$. (A^C indica el contrario del suceso A).

Parte II

Una agencia de alquiler de automóviles necesita estimar el número medio de kilómetros diarios que realiza su flota de automóviles. Se sabe que el número de kilómetros por día sigue una distribución normal con desviación típica de 6 km/día. Se toman los recorridos de 100 vehículos de la flota, obteniéndose que la media muestral es de 165 km/día.

(1 punto) Construya un intervalo de confianza para la media de dicha distribución a un nivel de confianza del 95 %.

(1 punto) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para asegurar al nivel de confianza del 90 % que el error cometido es a lo sumo 0.1?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(1 punto) Represente gráficamente el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y & \leq & 18 \\ 2x+3y & \leq & 26 \\ x+y & \leq & 16 \\ x \geq 0 & ; & y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

(1 punto) Calcule los vértices de ese recinto.

(1 punto) Obtenga en dicho recinto el valor máximo y el mínimo de la función $F(x, y) = 5x + 3y$. Diga en que puntos se alcanzan.

EJERCICIO 2

(3 puntos) Determine los valores que han de tomar "a" y "b" para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+b & si\ x<1 \\ ax^2+6x-7 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

sea derivable.

EJERCICIO 3

Parte I

En un cineclub hay 80 películas; 60 son de "acción" y 20 de "terror". Susana elige una película al azar y se la lleva. A continuación Luis elige otra película al azar.

(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto Susana como Luis elijan películas de acción?

(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida por Luis sea de acción?

Parte II

Se desea estimar, con un error máximo de 0.2 horas, el tiempo medio de estudio diario de los alumnos de primer curso universitario. Se sabe que la desviación típica es de 1 hora y se toma una muestra aleatoria de 100 alumnos.

(1 punto) Calcule el nivel de confianza del intervalo que se obtendrá.

(1 punto) Calcule el número de individuos que debe tener una muestra para asegurarnos una confianza del 99 %.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Resuelva la siguiente ecuación matricial: A·X – 2B = C, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2

La gráfica de la función derivada de una función $f(x)$ es una parábola de vértice (1, –4) que corta al eje de abscisas en los puntos (–1, 0) y (3, 0). A partir de la gráfica de f':

(1.75 puntos) Estudie el crecimiento y el decrecimiento de f. ¿Para qué valores de x se alcanzan los máximos y mínimos relativos?

(1.25 puntos) Esboce la forma de la gráfica de una función cuya derivada sea la parábola dada.

EJERCICIO 3

Parte I

Dos cajas, A y B, tienen el siguiente contenido:

La A: 5 monedas de 1 euro y 3 de 10 pesetas.

La B: 4 monedas de 1 euro, 4 de 10 pesetas y 2 de 25 pesetas.

De una de las cajas elegida al azar, se extrae una moneda.

(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de 1 euro?

(1 punto) Si la moneda extraída resulta ser de 10 pesetas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Parte II

(2 puntos) Se sospecha que el número de unidades que contiene cada dosis de un medicamento no llega a las 10000 que se indican en el envase. Para comprobar que el contenido medio de las dosis es el indicado tomamos, al azar, 100 dosis y determinamos el número de unidades de cada una, obteniendo de media 9940 unidades y de desviación típica 120 unidades.

¿Qué podemos decir sobre la indicación del envase, para un nivel de confianza del 99%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea el conjunto de restricciones siguiente: $\left.\begin{array}{rcl} x+y & \leq & 9 \\ x-y & \leq & 0 \\ x+2y & \leq & 16 \\ x & \geq & 0 \end{array}\right\}$.

(1 punto) Dibuje la región factible determinada por dichas restricciones.

(1 punto) Calcule los vértices de dicha región.

(1 punto) Obtenga los puntos en los que la función objetivo $F(x, y) = x + 2y$ presenta el máximo y el mínimo.

EJERCICIO 2

El consumo de luz (en miles de pesetas) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido, nos viene dado por la expresión: $f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 10$, con $0 \leq t \leq 12$

(1 punto) ¿En qué periodo de tiempo aumenta el consumo? ¿En cuál disminuye?

(1 punto) ¿En qué instante se produce el consumo máximo? ¿Y el mínimo?

(1 punto) Represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3

Parte I

La probabilidad de que un jugador A marque un gol de penalti es de 5/6, mientras que la de otro jugador B es 4/5. Si cada uno lanza un penalti,

(1 punto) Halle la probabilidad de que marque gol uno solo de los dos jugadores.

(1 punto) Halle la probabilidad de que al menos uno marque gol.

Parte II

Una muestra aleatoria de 36 cigarrillos de una marca determinada dio un contenido medio de nicotina de 3 miligramos.

Se sabe que el contenido en nicotina de estos cigarrillos sigue una distribución normal con una desviación típica de 1 miligramo.

(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el contenido medio en nicotina de los cigarrillos de esa marca sea superior a 3.2 miligramos?

(1 punto) Obtenga un intervalo de confianza al 99% para el contenido medio de nicotina de estos cigarrillos.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 150 y 100 pta el metro, respectivamente, se emplean 16 kg de plástico y 4 kg de cobre para cada hm (hectómetro) del tipo A y 6 kg de plástico y 12 kg de cobre para cada hm del tipo B.
Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 kg de plástico ni más de 168 kg de cobre, determine la longitud, en hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima.

EJERCICIO 2

Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

(1 punto) $f(x)=\dfrac{Lx}{x^2}$ (Lx indica logaritmo neperiano de x)

(1 punto) $g(x)=(1-x^3)\cos x$

(1 punto) $h(x)=4x^3-5x+\dfrac{1}{e^x}$

EJERCICIO 3

Parte I

Dos urnas A y B, que contienen bolas de colores, tienen la siguiente composición:

A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas. B: 4 blancas y 6 negras.

También tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado y sacamos una bola al azar de la urna que indica el dado.
(0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?
(0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?
(0.75 puntos) La bola extraída ha resultado ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Parte II

Un estudio realizado sobre 100 usuarios revela que un automóvil recorre anualmente un promedio de 15200 km con una desviación típica de 2250 km.
(1 punto) Determine un intervalo de confianza, al 99 %, para la cantidad promedio de kilómetros recorridos.
(1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido no sea superior a 500 km, con igual confianza?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(1 punto) Determine los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}.$$

(2 puntos) Determine la matriz X de dimensión 2x2 tal que:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2

Sea la función: $$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & si\ \ x\le 1\\ 3x^2-12x+9 & si\ \ 1<x\le 3\\ -2x^2+16x-30 & si\ \ x>3\end{cases}.$$

(2 puntos) Dibuje su gráfica y, a la vista de ella, estudie monotonía y extremos.
(1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.

EJERCICIO 3

Parte I

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A: "sacar al menos una cara y una cruz".
B: "sacar a lo sumo una cara".

(1 punto) Determine el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.
(1 punto) ¿Son independientes ambos sucesos?

Parte II

(2 puntos) La cantidad de hemoglobina en sangre del hombre sigue una ley normal con desviación típica de 2 g/dl.
Calcule el nivel de confianza de una muestra de 12 extracciones de sangre que indique que la media poblacional de hemoglobina en sangre está entre 13 y 15 gramos por decilitro.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$.

(1.5 puntos) Calcule los valores de x para los que no existe la inversa de A.
(1.5 puntos) Para $x = 3$, calcule, si es posible, A^{-1}.

EJERCICIO 2

Un agricultor comprueba que si el precio al que vende cada caja de fresas es "x" euros, su beneficio diario, en euros, será: $B(x) = -10x^2 + 100x - 210$.
(1 punto) Represente la función precio-beneficio.
(1 punto) Indique a qué precio debe vender cada caja de fresas para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál será ese beneficio máximo?
(1 punto) Determine a qué precios de la caja obtiene pérdidas el agricultor.

EJERCICIO 3

Parte I

Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B, cuyas probabilidades son $P(A) = 2/3$ y $P(B) = 1/2$.
(0.75 puntos) ¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles? ¿Por qué?
(0.75 puntos) Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcule $P(A\cup B)$.
(0.5 puntos) Suponiendo que $A\cup B = E$, calcule $P(A\cap B)$.

Parte II

(2 puntos) Una ciudad de 2000 habitantes está poblada por personas de pelo negro, rubio o castaño.
Se ha seleccionado, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra constituida por 28 personas de pelo negro, 32 de pelo rubio y 20 de pelo castaño.
Determine cuál es la composición, según el color del pelo, de esa ciudad.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{aligned} 5x+2y-10 &\geq 0 \\ x-y-2 &\leq 0 \\ 3x+4y-20 &\leq 0 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

(2 puntos) Dibuje dicho recinto y determine sus vértices.
(1 punto) Determine en qué punto de ese recinto alcanza la función $F(x, y) = 4x + 3y$ el máximo valor.

EJERCICIO 2

(1.5 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 + bx + c$, determine los valores de "b" y "c" sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto $(-1, 3)$.
(1.5 puntos) Calcule "a" para que el valor mínimo de la función $g(x) = x^2 + 2x + a$ sea igual a 8.

EJERCICIO 3

Parte I

El 35 % de los estudiantes de un centro docente practica el fútbol. El 70 % de los que practican el fútbol estudia Matemáticas, así como el 25 % de los que no practican el fútbol.
Calcule la probabilidad de que al elegir, al azar, un estudiante de ese centro:
(1 punto) Estudie Matemáticas.
(1 punto) Practique el fútbol, sabiendo que no es alumno de Matemáticas.

Parte II

(2 puntos) En una población normal con varianza conocida se ha tomado una muestra de tamaño 49 y se ha calculado su media: $\bar{x} = 4.2$
Determine la varianza de la población sabiendo que el intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional es (3.64, 4.76).

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) Un autobús transporta 90 viajeros con 3 tarifas diferentes:

1ª: Viajeros que pagan el billete entero, que vale 0.70 euros.

2ª: Estudiantes, con descuento del 50 %.

3ª: Jubilados, con descuento del 80 %.

Se sabe que el número de estudiantes es 10 veces el de jubilados y que la recaudación total ha sido de 46.76 euros. Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar el número de viajeros, de cada tarifa, que va en el autobús.

b) (1.5 puntos) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine, si existe, la matriz X que verifique $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

a) (2 puntos) Determine los valores de a y b para que sea derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 3 & si\ x \leq 1 \\ 2bx - 4 & si\ x > 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Represente gráficamente la función f si $a = 1$ y $b = 2$.

EJERCICIO 3.

Parte I

Se dispone de una baraja española de 40 cartas (10 de oros, 10 de copas, 10 de espadas y 10 de bastos). Se saca una carta, al azar, y, sin devolverla, se saca otra, al azar.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ninguna de las dos cartas sea de oros.

b) (1punto) Sabiendo que la 2ª carta extraída ha sido de copas, calcule la probabilidad de que también lo fuera la primera.

Parte II

(2 puntos) Para estudiar el gasto mensual en teléfono móvil de los jóvenes de una ciudad se ha elegido una muestra aleatoria de 16 estudiantes, con los resultados siguientes, expresados en euros:

4, 6, 30, 14, 16, 14, 15, 16, 22, 8, 3, 56, 42, 26, 30, 18.

Admitiendo que este gasto mensual sigue una ley Normal con desviación típica 13.78 euros, determine un intervalo de confianza, al 95 %, para la media del gasto mensual.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una persona desea adelgazar. En la farmacia le ofrecen dos compuestos A y B para que tome una mezcla de ambos en la comida, con las siguientes condiciones:

No debe tomar más de 150 g de la mezcla, ni menos de 50 g.

La cantidad de A debe ser mayor o igual que la de B.

No debe incluir más de 100 g del compuesto A.

Se sabe que cada 100 g de A contienen 30 mg de vitaminas y cada 100 g de B contienen 20 mg de vitaminas.

a) (2 puntos) Formule matemáticamente el conjunto de restricciones, dibuje la región factible y determine sus vértices.

b) (1 punto) ¿Cuántos gramos debe tomar de cada compuesto para obtener el preparado más rico en vitaminas?

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = -x^3 + 3x$.

a) (0.75 puntos) Determine sus puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) (1.5 puntos) Represéntela gráficamente.

c) (0.75 puntos) Obtenga las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de la función que tienen pendiente cero y diga cuáles son los puntos de tangencia.

EJERCICIO 3

Parte I

Juan y Pedro juegan a obtener la puntuación más alta lanzando sus dados. El dado de Juan tiene cuatro caras con la puntuación 5 y las otras dos caras con el 1.

El dado de Pedro tiene dos caras con el 6, otras dos con el 4 y las otras dos con el 1.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Pedro?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de empatar?

Parte II

(2 puntos) La edad de los niños que van a un parque sigue una ley Normal de media 8 años y desviación típica 2.1 años. En un momento determinado hay 25 niños en ese parque.

¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de ese grupo esté entre 8.5 y 9 años?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20 euros; para fabricar una librería de 3 estantes se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es 35 euros.

Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso, sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante, ni tampoco más de 70 de 3 estantes.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 5 & si \quad x \le 2 \\ x^2 - 6x + 10 & si \quad 2 < x < 5 \\ 4x - 15 & si \quad x \ge 5 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Represéntela gráficamente.

b) (1.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un colectivo de personas, el 80 % tiene más de 35 años. De los mayores de 35 años, el 40 % son mujeres. De los que no han superado los 35 años, el 45 % son hombres. Se elige una persona, al azar, de ese colectivo.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya superado los 35 años sabiendo que se ha elegido un hombre?

Parte II

Se ha medido la talla de 100 personas elegidas al azar, mediante muestreo aleatorio simple, de entre los estudiantes varones de bachillerato de una gran ciudad, obteniéndose una talla media de 1.75 m. Se sabe que la desviación típica de la población es 0.2 m.

a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 90 %, para la media poblacional de la talla de los estudiantes.

b) (1 punto) ¿Con qué nivel de confianza se ha construido el intervalo (1.73, 1.77) para la media poblacional?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1}.

b) (1.5 puntos) Calcule A^{-1} para $m = 2$.

EJERCICIO 2.

El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilogramos de un artículo viene dado por la función: $B(x) = -0.01x^2 + 3.6x - 180$.

a) (1 punto) Represente gráficamente esta función.

b) (1 punto) Determine el número de kilogramos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.

c) (1 punto) Determine cuántos kilogramos se deben producir y vender, como máximo, para que la empresa no tenga pérdidas.

EJERCICIO 3

Parte I

De una bolsa que contiene 4 monedas de 2 euros, 5 de 1 euro y 3 de 0.20 euros, se extraen dos monedas, al azar, sucesivamente y sin devolverlas a la bolsa.

a) (1.5 puntos) Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

A = "la suma de las dos monedas es inferior a 2.20 euros".

B = "al menos una de las dos monedas es de 0.20 euros".

b) (0.5 puntos) Razone si esos dos sucesos son independientes.

Parte II

(2 puntos) El peso de los peces adultos que se crían en una piscifactoría se distribuye según una ley Normal con desviación típica 9 g.

Los pesos, en gramos, de una muestra aleatoria de 9 peces adultos de esa piscifactoría son:

310, 311, 309, 295, 280, 294, 303, 305, 293.

Determine un intervalo de confianza, al 95 %, para el peso medio de los peces adultos de esa piscifactoría.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva.

Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

EJERCICIO 2

Sea f(x) = $\begin{cases} -t^3+5t^2 & si \quad 0\le t<3 \\ -t^2+12t-9 & si \quad 3\le t\le 5 \\ 2t+16 & si \quad 5<t\le 10 \end{cases}$

a) (2 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en t =3 y t =5.

b) (1 punto) Razone si f posee algún punto de inflexión y calcúlelo, en caso afirmativo.

EJERCICIO 3

Parte I

Los alumnos de Bachillerato de un I.E.S. proceden de 3 localidades A, B y C, siendo un 20 % de A, un 30 % de B y el resto de C. El 80 % de los alumnos de A cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º.El 50 % de los alumnos de B cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º. El 60 % de los alumnos de C cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º.

a) (1 punto) Seleccionado, al azar, un alumno de Bachillerato de ese I.E.S., ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º?

b) (1 punto) Si elegimos, al azar, un alumno de Bachillerato de ese I.E.S. y éste es un alumno de 1º, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la localidad B?

Parte II

Se sabe que la estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 6 cm.

Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos que da una media de 176 cm.

a) (1 punto) Obtenga un intervalo, con un 99 % de confianza, para la media de la estatura de la población.

b) (1 punto) Calcule el mínimo tamaño de muestra que se ha de tomar para estimar la estatura media de los individuos de la población con un error inferior a 1 cm y un nivel de confianza del 95%.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea el sistema de inecuaciones siguiente:

$x + y \le 120$; $3y \le x$; $x \le 100$; $y \ge 10$.

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

b) (1 punto) ¿En qué punto de esa región, $F(x, y) = 25x + 20y$, alcanza el máximo?

EJERCICIO 2

Sea x, en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra.

Sea $f(x) = 2 - \frac{4}{x+1}$, con $0 \ge x$, la función que representa el balance económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola.

a) (2 puntos) Represente la función f.

b) (0.5 puntos) ¿A partir de qué precio de venta del litro de aceite empieza esta empresa a tener beneficios?

c) (0.5 puntos) ¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa? ¿Y las pérdidas?

EJERCICIO 3

Parte I

Según la estadística de los resultados en las Pruebas de Acceso en una provincia andaluza, en septiembre de 2001, el número de alumnas presentadas es 840, de las que han aprobado un 70 %, mientras que el número de alumnos presentados es 668, habiendo aprobado un 75 % de éstos.

a) (1 punto) Elegida, al azar, una persona presentada a las Pruebas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado?

b) (1 punto) Sabiendo que una persona ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?

Parte II

Se sabe que los estudiantes de una provincia duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley Normal de media μ horas y desviación típica σ =2 horas.

a) (1 punto) A partir de una muestra de 64 alumnos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (7.26, 8.14) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con que se ha construido dicho intervalo.

b) (1 punto) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo, de 0.75 horas, con un nivel de confianza del 98 %.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$.

Calcule x, y, z, sabiendo que A·B = 2C −D.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3x-3 & si\ x \le 2 \\ x^2-6x+11 & si\ x>2 \end{cases}$

a) (1 punto) Represéntela gráficamente.
b) (1.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad. Calcule sus extremos.
c) (0.5 puntos) ¿Existe algún punto donde la pendiente de la recta tangente a su gráfica sea cero? En caso afirmativo, determine cuál es.

EJERCICIO 3

Parte I

Una urna contiene 15 bolas, de las cuales 6 son azules y 9 son rojas. Se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento, 3 bolas, al azar.
a) (0.5 puntos) Describa el espacio muestral asociado al experimento.
b) (0.75 puntos) Determine la probabilidad de que se extraiga, al menos, una bola azul.
c) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la tercera bola extraída sea roja.

Parte II

(2 puntos) En un pueblo habitan 700 hombres adultos, 800 mujeres adultas y 500 menores.
De él se quiere seleccionar una muestra de 80 personas, utilizando, para ello, muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Un ahorrador dispone de 10000 euros para invertir en fondos de dos tipos: A o B. La inversión en fondos A debe superar los 5000 euros y, además, ésta debe doblar, al menos, la inversión en fondos B.
La rentabilidad del pasado año de los fondos A ha sido del 2.7 % y la de los B ha sido del 6.3 %.
Suponiendo que la rentabilidad continúe siendo la misma, determine la inversión que obtenga el máximo beneficio. Calcule este beneficio.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.
a) (2 puntos) Halle el valor de los coeficientes a, b y c, si se sabe que en el punto (0, 0) su gráfica posee un extremo relativo y que el punto (2, −16) es un punto de inflexión.
b) (1 punto) Para $a = 1$, $b = 1$ y $c = 0$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = −2.

EJERCICIO 3

Parte I

Tenemos 3 estuches de lápices A, B y C. El estuche A tiene 9 lápices, de los cuales 3 son negros; el B contiene 7 lápices, de los cuales 2 son negros; el C contiene 5 lápices de los que 1 es negro.
a) (0.5 puntos) Si tomamos, al azar, un lápiz del estuche B, ¿cuál es la probabilidad de que sea negro?
b) (1.5 puntos) Si elegimos, al azar, uno de los 3 estuches y de éste tomamos, al azar, un lápiz, ¿cuál es la probabilidad de que no sea negro?

Parte II

(2 puntos) El peso de los alumnos de un Instituto es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media μ, desconocida, y desviación típica 8 kg.
¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que permita estimar μ con un error máximo de 3 kg y un nivel de confianza del 99 %?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Realice, cuando sea posible, los siguientes productos de matrices: A·B, B·C, C·A.
b) (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial: A·X + B = C.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$.

a) (1 punto) Represente gráficamente su función derivada determinando los puntos de corte con el eje de abscisas y su vértice.
b) (1 punto) Halle los puntos de la gráfica de f donde la recta tangente es paralela a $y = -3x + 3$.
c) (1 punto) Calcule los máximos y mínimos de f.

EJERCICIO 3

Parte I

El despertador de Pedro no funciona bien, pues el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, Pedro llega tarde a clase con probabilidad 0.2; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde a clase es 0.9.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que Pedro llegue a tiempo.
b) (1 punto) Determine la probabilidad de que el despertador haya funcionado bien, si sabemos que Pedro ha llegado tarde a clase.

Parte II

El gasto mensual de los estudiantes de un Instituto se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 4 euros. Se ha seleccionado una muestra aleatoria y, con una confianza del 97 %, se ha construido un intervalo para la media poblacional cuya amplitud es 2.17 euros.
a) (1.5 puntos) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?
b) (0.5 puntos) Calcule el gasto mensual medio de la muestra tomada sabiendo que el límite inferior del intervalo de confianza es 83.915 euros.

CURSO 2001-2002 5

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón.
Se necesitan 150 g de almendra y 50 g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100 g de almendra y 100 g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es 1.75 euros, y por cada tableta de turrón es de 1 euro.
Determine cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

EJERCICIO 2

Se considera la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & si \quad x < -1 \\ -x^2 + a & si \quad -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x+2}{x} & si \quad 1 \le x \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Halle los valores de a para los que f es continua y derivable.
b) (1.5 puntos) Para a =4, halle las asíntotas y extremos relativos.

EJERCICIO 3

Parte I

Las instalaciones de un club tienen una sala de medios audiovisuales y una de informática. El 60% de los socios utiliza la 1ª, el 30 % la 2ª y el 20 % ambas.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un socio, elegido al azar, no utilice ninguna de las dos salas.
b) (1 punto) Si se sabe que un socio utiliza la sala de audiovisuales, ¿cuál es la probabilidad de que no utilice la de informática?

Parte II

El tiempo de espera, en minutos, de los usuarios en una determinada parada de autobús sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica 1.5 minutos.
a) (0.75 puntos) ¿Cómo se distribuye el tiempo medio de espera para muestras aleatorias de tamaño 16?
b) (1.25 puntos) Si hemos tomado una muestra aleatoria de 16 usuarios, cuya media es 5 minutos, determine el intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.
b) (2 puntos) Haciendo m =4, resuelva la ecuación matricial X·A= (3 1 1)

EJERCICIO 2

Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) (0.75 puntos) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3-1}$ b) (0.75 puntos) $g(x) = 4x \cdot L(3x + 1)$

c) (0.75 puntos) $h(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^3 + 2x)$. d) (0.75 puntos) $p(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

EJERCICIO 3

Parte I

El partido A y el partido B concurren a unas elecciones en un municipio donde el 55% de los votantes son mujeres. Se sabe que el 40 % de los hombres votan al partido A y el 50 % al B. El 60 % de las mujeres votan al partido A y el 20 % al B. El resto de electores no vota.
a) (1 punto) Halle la probabilidad de que una persona, elegida al azar, no vote.
b) (1 punto) Sabiendo que una persona, elegida al azar, ha votado al partido A, halle la probabilidad de que sea mujer.

Parte II

Los resultados de un test de sensibilidad musical realizado a los alumnos de un Conservatorio se distribuyen según una ley Normal de media 65 y desviación típica 18.
a) (0.75 puntos) ¿Cuál es la distribución de la media muestral para muestras de tamaño 25?
b) (1.25 puntos) Para muestras aleatorias de tamaño 100, halle la probabilidad de que su puntuación media esté comprendida entre 63 y 67 puntos.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una fábrica produce dos tipos de juguetes, muñecas y coches teledirigidos. La fábrica puede producir, como máximo, 200 muñecas y 300 coches.
La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricar los juguetes y sabe que la producción de cada muñeca necesita 3 horas de trabajo y reporta un beneficio de 10 euros, mientras que la de cada coche necesita 6 horas de trabajo y reporta un beneficio de 15 €.
Calcule el número de muñecas y de coches que han de fabricarse para que el beneficio global de la producción sea máximo y obtenga dicho beneficio.

EJERCICIO 2

a) (1.5 puntos) Sea la función $f(x) = \dfrac{a}{x} + bx^2$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1, 3).
b) (1.5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = x \cdot L(x)$ en el punto de abscisa 1.

EJERCICIO 3

Parte I

En una ciudad, el 60 % de los niños usa zapatillas deportivas, el 50 % usa ropa deportiva y el 20 % usa ambas prendas.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño, elegido al azar, no use ninguna de las dos prendas?
b) (1 punto) Si un niño usa zapatillas deportivas, ¿cuál es la probabilidad de que no use ropa deportiva?

Parte II

El peso neto de las bolsas de almendras de una determinada marca es una variable aleatoria Normal con media μ, desconocida, y varianza σ^2 = 50.4 g^2. Se sabe que 35 bolsas, elegidas al azar, han dado un peso total de 8652 g.
a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 90 %, para μ.
b) (0.5 puntos) ¿A partir de qué nivel de confianza, el correspondiente intervalo para μ contiene el valor 250 g?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) Clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x+2y+z=5 \end{cases}$

b) (1.5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcule $(A^t \cdot B - 2I_2)^{-1}$; ($I_2$ es la matriz unidad de orden 2 y A^t la traspuesta de A).

EJERCICIO 2

El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por $f(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296$, en función de la hora x, siendo $11 \leq x \leq 20$.

a) (1 punto) Halle los extremos relativos de esta función.

b) (1 punto) Represente esta función y determine las horas en las que crece el número medio de clientes.

c) (1 punto) Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas.

EJERCICIO 3

Parte I

El 55 % de la población española son mujeres, de las cuales un 23 % usa el coche para ir al trabajo. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, vaya al trabajo en coche es 0.52.

a) (1 punto) Elegido un hombre, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice el coche para desplazarse al trabajo?

b) (1 punto) Si se elige una persona, al azar, y resulta que no usa el coche para ir al trabajo, calcule la probabilidad de que sea una mujer.

Parte II

(2 puntos) El peso de los adultos de una determinada especie de peces sigue una ley Normal de desviación típica 112 g.

¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra de peces que debería tomarse para obtener, con una confianza del 95%, la media de la población con un error menor de 20 gramos?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones: $x + 2y \geq 80$, $3x + 2y \geq 160$, $x + y \leq 70$, y determine sus vértices.

b) (1 punto) Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x, y) = 9x + 8y - 5$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

EJERCICIO 2

a) (1.5 puntos) Sea la función $f(x) = x^2 + ax + b$. Calcule a y b para que su gráfica pase por el punto $(0, -5)$ y que en este punto la recta tangente sea paralela a la recta $y = -4x$.

b) (1.5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función g cuya derivada tiene por gráfica la recta que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(3, 1)$.

EJERCICIO 3

Parte I

En una biblioteca sólo hay libros de física y de matemáticas, que están escritos en inglés o en español. Se sabe que el 70 % de los libros son de física, el 80 % de los libros están escritos en español y el 10 % son libros de matemáticas escritos en inglés.

a) (1 punto) Calcule qué tanto por ciento de los libros son de física y escritos en español.

b) (1 punto) Si cogemos un libro de física, ¿cuál es la probabilidad de que esté escrito en español?

Parte II

Se está estudiando el consumo de gasolina de una determinada marca de coches. Para ello se escogen 50 automóviles al azar y se obtiene que el consumo medio es de 6.5 litros. Con independencia de esta muestra, se sabe que la desviación típica del consumo de ese modelo de coches es 1.5 litros.

a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 97 %, para el consumo medio de gasolina de los coches de esa marca.

b) (1 punto) El fabricante afirma que el consumo medio de gasolina de sus vehículos está comprendido entre 6.2 y 6.8 litros. ¿Con qué nivel de confianza puede hacer dicha afirmación?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} -5x+3y \leq 2 \\ -x+2y \geq 6 \\ 2x+3y \leq 37 \end{cases}$.

a) (2.25 puntos) Represente el conjunto solución y determine sus vértices.
b) (0.75 puntos) Halle el punto del recinto anterior en el cual la función $F(x,y) = -2x + 5y$ alcanza su valor máximo.

EJERCICIO 2

a) (2 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & si \ x \leq 2 \\ a(x-3)^2 + 3 & si \ x > 2 \end{cases}$.

Halle a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 2$.

b) (1 punto) Halle la función derivada de $g(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$

EJERCICIO 3
Parte I
Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos.
a) (1 punto) Determine el espacio muestral asociado al experimento.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que no escriban la misma vocal.

Parte II
La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7.5 m. En un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21.06, 26.94) para la longitud media.
a) (0.5 puntos) Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra.
b) (1.5 puntos) Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (0.75 puntos) Calcule la matriz $A = M \cdot M^t - 5M$; (M^t indica la traspuesta de M).
b) (2.25 puntos) Calcule la matriz $B = M^{-1}$ y resuelva la ecuación $N + X \cdot M = M \cdot B$, donde X es una matriz 2×2.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si \quad 0 < x < 2 \\ \frac{x}{4} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$.

a) (1 punto) Represéntela gráficamente.
b) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.
c) (1 punto) Calcule sus extremos y asíntotas horizontales y verticales.

EJERCICIO 3
Parte I
El 70 % de los alumnos de un Instituto son de Bachillerato y el resto de E.S.O. De los alumnos de Bachillerato, el 60 % estudia más de 3 horas al día, y sólo el 30 % de los de E.S.O. estudia más de 3 horas al día.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho Instituto, elegido al azar, estudie más de 3 horas al día.
b) (1 punto) Sabiendo que un alumno de este Instituto, elegido al azar, estudia más de 3 horas al día, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Bachillerato?

Parte II
De una población Normal, con media desconocida y varianza 81, se extrae una muestra aleatoria que resulta tener una media muestral de 112.
a) (1 punto) Obtenga un intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional, si el tamaño de la muestra es 49.
b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra si se desea que el error cometido, al estimar la media poblacional, sea inferior a 2, para un nivel de confianza del 90 %?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$.

a) (1.5 puntos) Halle los valores de x para los que se verifica $A^2 = 2A$.
b) (1.5 puntos) Para $x = -1$, halle A^{-1}. Compruebe el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$.

a) (1 punto) Determine su dominio y asíntotas. Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (1 punto) Determine sus máximos y mínimos relativos, si los hubiere. Estudie su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.
c) (1 punto) Represéntela gráficamente.

EJERCICIO 3

Parte I

Una máquina A fabrica 100 piezas al día, de las cuales un 6 % son defectuosas. Otra máquina B fabrica 50 piezas al día, con un porcentaje de defectuosas del 2 %.
Mezclamos las piezas fabricadas por ambas máquinas en un día y extraemos una al azar.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza extraída sea defectuosa?
b) (1 punto) Sabiendo que la pieza extraída es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la haya fabricado la máquina B ?

Parte II

Se sabe que la antigüedad de los coches fabricados por una empresa es una variable aleatoria Normal, con desviación típica 2.9 años.
a) (1 punto) Un estudio realizado sobre una muestra aleatoria de 169 coches, de esa empresa, revela que la antigüedad media de la muestra es 8.41 años. Obtenga un intervalo de confianza, al 90 %, para la antigüedad media de la población.
b) (1 punto) Determine el número mínimo de coches que debe componer una muestra, para obtener, con un nivel de confianza del 95 %, un error de estimación menor que 0.35 años.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una empresa gana 150 euros por cada Tm de escayola producida y 100 euros por cada Tm de yeso.
La producción diaria debe ser como mínimo de 30 Tm de escayola y 30 Tm de yeso.
La cantidad de yeso no puede superar en más de 60 Tm a la de escayola.
El triple de la cantidad de escayola, más la cantidad de yeso, no puede superar 420 Tm.
Calcule la cantidad diaria que debe producirse de cada material, para obtener la máxima ganancia y determine dicha ganancia.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 1 \\ \frac{1}{x} & si \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{x-1}{2} & si \quad x > 2 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en $x = 1$ y en $x = 2$.
b) (1 punto) Represéntela gráficamente.

EJERCICIO 3

Parte I

Sean A y B dos sucesos aleatorios independientes. Se sabe que P(A) = 0.3, P(B)= 0.4. Calcule las siguientes probabilidades:
a) (1 punto) $P(A \cup B)$.
b) (1 punto) $P(A/B^C)$.

Parte II

En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido 37.1 °C y se sabe que la desviación típica de toda la población es 1.04 °C.
a) (1 punto) Obtenga un intervalo de confianza, al 90 %, para la media poblacional.
b) (1 punto) ¿Con qué nivel de confianza podemos afirmar que la media de la población está comprendida entre 36.8 °C y 37.4 °C?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una empresa fabrica sofás de dos tipos, A y B, por los que obtiene un beneficio, por unidad, de 1500 y 2000 euros, respectivamente.
Al menos se deben fabricar 6 sofás del tipo A y 10 del tipo B, por semana, y además, el número de los del tipo A no debe superar en más de 6 unidades al número de los del B.
¿Cuántas unidades de cada tipo se deben fabricar semanalmente para obtener beneficio máximo, si no se pueden fabricar más de 30 sofás semanalmente?

EJERCICIO 2

Los beneficios esperados de una inmobiliaria en los próximos 5 años vienen dados por la función $B(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$. (t indica el tiempo, en años, $0 \le t \le 5$).
a) (2 puntos) Represente la evolución del beneficio esperado en función del tiempo.
b) (1 punto) En ese periodo, ¿cuándo será máximo el beneficio esperado?

EJERCICIO 3

Parte I

En un curso, el porcentaje de aprobados en Lengua es del 65 % y en Filosofía del 50 %. Se sabe que la probabilidad P(F/L) = 0.7, siendo F y L los sucesos "aprobar Filosofía" y "aprobar Lengua", respectivamente.
a) (1 punto) Calcule P(L/F).
b) (1 punto) Halle la probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas.

Parte II

a) (1 punto) Se sabe que la desviación típica de los salarios de una población es 205 euros. Determine un intervalo, con el 90 % de confianza, para el salario medio de la población, sabiendo que el salario medio correspondiente a una muestra de 2500 personas ha sido de 1215 euros.
b) (1 punto) Elegida otra muestra grande, cuya media ha sido 1210 euros, se ha obtenido, con un 95 % de confianza, el intervalo (1199.953, 1220.045). ¿Cuál es el tamaño de esta muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones que dé solución al siguiente problema:
Un inversor compró acciones de las empresas A, B y C por un valor total de 20000 euros, invirtiendo en C el doble que en A. Al cabo de un año la empresa A le pagó el 6% de beneficio, la B el 8 % y la C el 10 %. Si el beneficio total fue de 1720 euros, ¿qué dinero invirtió en cada empresa?

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2+x & x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & si\ x \le 4 \\ x^2 - 9x + 21 & si\ x > 4 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (1.5 puntos) Represente gráficamente la función y determine máximos y mínimos relativos, si los hubiere, así como el crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 3

Parte I

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 veces una moneda y observar el resultado.
a) (0.8 puntos) Escriba el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.
b) (1.2 puntos) Sean los sucesos A: "obtener al menos una cara", B: "obtener cara en solo uno de los tres lanzamientos". Calcule P(A) y P(B). ¿Son independientes A y B?

Parte II

El perímetro craneal de una población de varones adultos sigue una ley Normal con desviación típica 4 cm.
a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 95 %, para el perímetro craneal medio, sabiendo que una muestra aleatoria de 100 individuos de esa población tiene una media de 57 cm.
b) (0.5 puntos) Con el mismo nivel de confianza, si se aumenta el tamaño de la muestra, razone si aumenta, disminuye o no varía la amplitud del intervalo.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\geq 1$, $y \leq x$, $x \leq 2$. Determine sus vértices.

b) (1 punto) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = -x + 2y - 3$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -4x-3 & si \quad x \leq -1 \\ 2x^2-1 & si \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{k+2}{x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Calcule el valor que debe tomar el parámetro k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$ y estudie su derivabilidad para el valor de k obtenido.

b) (1 punto) Dibuje la gráfica de la función para $k = -1$.

EJERCICIO 3

Parte I

En una residencia hay 212 ancianos de los que 44 tienen afecciones pulmonares. Del total de ancianos, 78 son fumadores, y solo hay 8 que tienen enfermedad de pulmón y no fuman.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un anciano de esa residencia, elegido al azar, no fume y tampoco tenga afección pulmonar?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de enfermos de pulmón son fumadores?

Parte II

Se sabe que la desviación típica del peso de las naranjas que se producen en una determinada huerta es de 20 gramos. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 naranjas de esa huerta, siendo su peso medio 200 gramos.

a) (0.75 puntos) Indique la distribución aproximada que siguen las medias de las muestras de ese tamaño y justifique su respuesta.

b) (1.25 puntos) Calcule un intervalo de confianza, a un nivel del 95 %, para el peso medio de las naranjas de esa huerta.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{pmatrix}$.

a) (1 puntos) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

b) (2 puntos) Haciendo $m = 0$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A = I_2$, donde I_2 es la matriz unidad de orden 2 y X es una matriz cuadrada de orden 2.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$.

a) (1.5 puntos) Halle a y b para que la función se anule en $x = 1$ y tenga un punto de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$.

b) (1.5 puntos) Para $a = -3$ y $b = 2$, calcule sus máximos y mínimos relativos.

EJERCICIO 3

Parte I

Disponemos de dos urnas A y B conteniendo bolas de colores. La urna A tiene 4 bolas blancas y 3 rojas, y la B tiene 5 blancas, 2 rojas y 1 negra. Lanzamos un dado, si sale 1, 2, 3 o 4 extraemos una bola de A y si sale 5 o 6 la extraemos de B.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

b) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

c) (1 punto) Sabiendo que la bola extraída ha sido blanca, calcule la probabilidad de que en el dado haya salido 5 o 6.

Parte II

El tiempo que la población infantil dedica semanalmente a ver la televisión, sigue una ley Normal con desviación típica 3 horas.

Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 niños y, con un nivel de confianza del 97%, se ha construido un intervalo para la media poblacional.

a) (1.25 puntos) Calcule el error máximo cometido y el tiempo medio de la muestra elegida, sabiendo que el límite inferior del intervalo de confianza obtenido es 23.5 horas.

b) (0.75 puntos) Supuesto el mismo nivel de confianza, ¿cuál debería haber sido el tamaño mínimo de la muestra para cometer un error en la estimación inferior a media hora?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una piscifactoría vende gambas y langostinos a 10 y 15 euros el kg, respectivamente.

La producción máxima mensual es de una tonelada de cada producto y la producción mínima mensual es de 100 kg de cada uno.

Si la producción total es, a lo sumo, de 1700 kg al mes, ¿cuál es la producción que maximiza los ingresos mensuales? Calcule estos ingresos máximos.

EJERCICIO 2

Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función $f:[0,45]\to\mathbb{R}$ cuya expresión analítica es $f(t) = 7.2t - 0.16t^2$, donde t es el tiempo, expresado en minutos.

a) (1.5 puntos) Represente gráficamente esta función.

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es el máximo rendimiento del jugador? ¿En qué momento lo consigue? ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?

EJERCICIO 3

Parte I

De dos sucesos A y B, asociados a un mismo experimento aleatorio, se conocen las probabilidades $P(B) = 0.7$, $P(A/B) = 0.8$ y $P(A\cap B^C) = 0.24$.

a) (0.5 puntos) Calcule $P(A\cap B)$.

b) (1 punto) Halle $P(A)$.

c) (0.5 puntos) Determine si A y B son independientes.

Parte II

Una variable aleatoria sigue una distribución Normal con desviación típica 15.

a) (1 punto) Construya un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 99.5 %, sabiendo que una muestra de 20 individuos tiene una media de 52.

b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de una muestra de esta población para que un intervalo de confianza, con nivel del 90 %, para la media de la población tenga una amplitud inferior a 3 unidades?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) Clasifique y resuelva el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

$x - 2y + z = 0,\quad 2x + y - z = 5,\quad 4x + 7y - 5z = 15.$

b) (1.5 puntos) Determine la matriz X, de orden 2, que verifica la igualdad

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

a) (1.5 puntos) Indique el dominio de definición de f, sus puntos de corte con los ejes, sus máximos y mínimos, si existen, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (1.5 puntos) Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de f, si las tiene, y represente la gráfica de la función.

EJERCICIO 3

Parte I

En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. Asimismo se ha observado que 38 de las niñas nacidas en ese mes tienen los ojos azules.

Se elige, al azar, un recién nacido entre los 200 citados.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que tenga los ojos azules.

b) (1.5 puntos) Si el recién nacido que se elige tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea un varón?

Parte II

Sea una población cuyos elementos son 1, 2, 3.

Mediante muestreo aleatorio simple se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2.

a) (0.75 puntos) Escriba las posibles muestras.

b) (1.25 puntos) Calcule la varianza de las medias muestrales.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo. ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál sería dicho ingreso?

EJERCICIO 2

a) (1 punto) Halle la función derivada de la función $f(x)=L\left(\frac{x}{x+1}\right)$ y simplifique el resultado.

b) (1 punto) Obtenga las asíntotas de la función $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.

c) (1 punto) Obtenga los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$.

EJERCICIO 3

Parte I

En cierto barrio hay dos panaderías. El 40% de la población compra en la panadería A, el 25% en la B, y el 15% en ambas. Se escoge una persona al azar:

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en A y no compre en B?

b) (0.5 puntos) Si esta persona es cliente de A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de B?

c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente de A ni de B?

d) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "ser cliente de A" y "ser cliente de B"?

Parte II

Para estimar la media de una variable aleatoria X, que se distribuye según una ley Normal con desviación típica 2.5, se toma una muestra aleatoria cuya media es 4.5. Para un nivel de confianza del 99%:

a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza para la media de la población, si el tamaño de esa muestra es 90.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debería tener otra muestra para obtener un intervalo de confianza, con una amplitud máxima de 1 unidad.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-y-z=-2 \\ 2x+3y-z=2 \\ 4x+y-3z=-2 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Clasifique y resuelva el sistema.

b) (1 punto) Escriba la matriz de coeficientes de este sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\frac{4x-1}{2x-2}$.

a) (2 puntos) Determine su dominio, los puntos de corte con los ejes, sus asíntotas, y represéntela gráficamente.

b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3

Parte I

Entre las 7 bolas de una máquina de futbolín hay 2 rojas y 5 blancas; en cada partida, la máquina va sacando las bolas de una en una, de forma aleatoria, sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) (0.5 puntos) "La primera bola es roja".

b) (0.5 puntos) "Las dos primeras bolas son blancas".

c) (1 punto) "Las dos primeras bolas son de colores distintos".

Parte II

La resistencia a la rotura, de un tipo de hilos de pesca, es una variable aleatoria Normal, con media 4 kg y desviación típica 1.4 kg. Se toman muestras aleatorias de 25 hilos de este tipo y se obtiene la resistencia media a la rotura.

a) (0.75 puntos) ¿Cómo se distribuye la resistencia media a la rotura?

b) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia media a la rotura no pertenezca al intervalo de extremos 3.90 kg y 4.15 kg?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule $(A - I_2)\cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.
b) (1 punto) Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de B) y calcule, si es posible, $B^t\cdot A$.
c) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica $A\cdot X + B = C$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ -x^2+4x-2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$.

a) (1 punto) Analice su continuidad y su derivabilidad.
b) (1.5 puntos) Estudie la monotonía, determine sus extremos y analice su curvatura.
c) (0.5 puntos) Represente la gráfica de la función.

EJERCICIO 3

Parte I

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0.4$, $P(B^C) = 0.7$ y $P(A\cup B) = 0.6$, donde B^C es el suceso contrario de B.
a) (1 punto) ¿Son independientes A y B?
b) (1 punto) Calcule $P(A/B^C)$.

Parte II

Una empresa de teléfonos móviles ha hecho un estudio sobre el tiempo que tardan sus baterías en descargarse, llegando a la conclusión de que dicha duración, en días, sigue una ley Normal de media 3.8 y desviación típica 1.
Se toma una muestra de 16 móviles de esta empresa. Halle la probabilidad de que:
a) (1 punto) La duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 4.1 y 4.3 días.
b) (1 punto) La duración media de las baterías de la muestra sea inferior a 3.35 días.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y)=3x+5y$, en el recinto del plano determinado por las inecuaciones:

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ 3x-2y\geq 10,\ 2x+3y\leq 24,\ x-5y\geq -1.$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=-x^3+6x^2-9x$.

a) (1 punto) Estudie la monotonía y calcule los extremos relativos de f.
b) (1 punto) Estudie la curvatura y calcule el punto de inflexión de f.
c) (1 punto) Represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3

Parte I

Se realiza una encuesta sobre las preferencias de vivir en la ciudad o en urbanizaciones cercanas. Del total de la población encuestada el 60% son mujeres, de las cuales prefieren vivir en la ciudad un 73%. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, desee vivir en la ciudad es 0.62.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que elegido un hombre al azar, prefiera vivir en la ciudad.
b) (1 punto) Supuesto que una persona, elegida al azar, desee vivir en la ciudad, calcule la probabilidad de que sea mujer.

Parte II

Se sabe que la velocidad de los coches que circulan por una carretera es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 12 km/hora.
a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 400 coches que da una velocidad media de 87 km/hora. Obtenga un intervalo con un 95% de confianza, para la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera.
b) (1 punto) Calcule el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar para estimar la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera, con un error inferior a 1 km/hora para un nivel de confianza del 99%.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de cacao, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1 euro la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3 euros la unidad.

En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10.5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos.

EJERCICIO 2

Calcule las derivadas de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado):

(0.75 puntos) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}-(5x-x^2)^2.$

(0.75 puntos) $g(x)=(x^2-1)\cdot L\,x.$

(0.75 puntos) $h(x)=2^{5x}.$

(0.75 puntos) $i(x)=(x^3-6x)\cdot(x^2+1)^3.$

EJERCICIO 3

Parte I

Consideramos el experimento aleatorio de lanzar dos dados distintos y anotar el producto de sus puntuaciones.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho producto sea igual a 6?

b) (1 punto) Si sabemos que el producto ha sido 4, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido los dos dados con la misma puntuación?

Parte II

Dada la población de elementos {3, 4, 5, 8}, se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento.

a) (0.5 puntos) Escriba todas las muestras posibles.

b) (0.75 puntos) Calcule la varianza de la población.

c) (0.75 puntos) Calcule la varianza de las medias muestrales.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) De una matriz A se sabe que su segunda fila es $\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$ y su segunda columna es $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Halle los restantes elementos de A sabiendo que $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2

De una función f se sabe que su función derivada es $f'(x)=3x^2-9x+6.$

a) (1.5 puntos) Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.

b) (1.5 puntos) Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por (0, 1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

EJERCICIO 3

Parte I

En una ciudad, el 40% de sus habitantes lee el diario A, el 25% lee el diario B y el 50% lee al menos uno de los dos diarios.

a) (0.5 puntos) Los sucesos “leer el diario A” y “leer el diario B” ¿son independientes?

b) (0.5 puntos) Entre los que leen el diario A, ¿qué porcentaje lee también el diario B?

c) (0.5 puntos) Entre los que leen, al menos, un diario ¿qué porcentaje lee los dos?

d) (0.5 puntos) Entre los que no leen el diario A, ¿qué porcentaje lee el diario B?

Parte II

El número de horas semanales que los estudiantes de Bachillerato de una ciudad dedican al deporte se distribuye según una ley Normal de media 8 y varianza 7.29.

a) (0.5 puntos) Para muestras de tamaño 36, indique cuál es la distribución de las medias muestrales.

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 36 esté comprendida entre 7.82 y 8.36 horas?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (2 puntos) Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además, el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne.
Si pagamos 18 euros por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas?

b) (1 punto) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle A^{2004}.

EJERCICIO 2

a) (1.25 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa x = 2.

b) (1.25 puntos) ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, la recta tangente es paralela a $y = 3x - 5$?

c) (0.5 puntos) Sea $g(x) = 2x^2 - 8x + a$. Halle a para que el valor mínimo de g sea 3.

EJERCICIO 3

Parte I

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcule:

a) (1 punto) La probabilidad de que la segunda bola sea verde.

b) (1 punto) La probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Parte II

La superficie de las parcelas de una determinada provincia se distribuye según una ley Normal con media 2.9 Ha y desviación típica 0.6 Ha.

a) (0.5 puntos) Indique la distribución de las medias muestrales para muestras de tamaño 169.

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de tamaño 169 tenga una superficie media comprendida entre 2.8 y 3 Ha?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Los vértices de un polígono convexo son (1, 1), (3, 1/2), (8/3, 5/2), (7/3, 3) y (0, 5/3). Calcule el máximo de la función objetivo $F(x, y) = 3x - 2y + 4$ en la región delimitada por dicho polígono.

b) (2 puntos) Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones:

$$x + 2y \geq 6 \quad ; \quad x - y \leq 1 \quad ; \quad y \leq 5 \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0$$

y determine sus vértices.

EJERCICIO 2

(2 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & si \quad x \leq 3 \\ \dfrac{4}{x-2} & si \quad x > 3 \end{cases}.$$

b) (1 punto) Calcule la derivada de $g(x) = (x+1) \cdot e^{2x+1}$.

EJERCICIO 3

Parte I

El despertador de un trabajador suena en el 80% de los casos. Si suena, la probabilidad de que llegue puntual al trabajo es 0.9; si no suena, llega tarde el 50% de las veces.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue puntual?

b) (1 punto) Si llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sonado el despertador?

Parte II

a) (1 punto) De una población Normal de media desconocida y desviación típica 6, se extrae la siguiente muestra

82, 78, 90, 89, 92, 85, 79, 63, 71.

Determine un intervalo de confianza, al 98%, para la media de la población.

b) (1 punto) Determine el tamaño que debe tener otra muestra de esta población para que un intervalo de confianza para la media, al 98%, tenga una amplitud igual a 4.66.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+y\leq 6 \\ 3x-2y\leq 13 \\ x+3y\geq -3 \\ x\geq 0 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Dibuje el recinto cuyos puntos son las soluciones del sistema y obtenga sus vértices.
b) (1 punto) Halle los puntos del recinto en los que la función F(x, y) = x – 2y toma los valores máximo y mínimo, y determine éstos.

EJERCICIO 2

La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión:

$$T(t) = 40t - 10t^2 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 4$$

a) (1.5 puntos) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.
b) (1.5 puntos) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

EJERCICIO 3

Parte I

María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado, si en los dos dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que gane Laura.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que gane María.

Parte II

Un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración, en horas, de las pilas que fabrica sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 3600. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95% ha obtenido para la media el intervalo de confianza (372.6, 392.2).
a) (1 punto) Calcule el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado.
b) (1 punto) ¿Cuál sería el error de su estimación, si hubiese utilizado una muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86.9%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (2 puntos) Calcule la matriz P que verifica $B\cdot P - A = C^t$ (C^t, indica traspuesta de C)
b) (0.5 puntos) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A\cdot M\cdot C$.
c) (0.5 puntos) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t\cdot N$ sea una matriz cuadrada.

EJERCICIO 2

a) (1.5 puntos) Halle los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en el punto (–2, 3).
b) (1.5 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 4x + 2$ en su punto de inflexión.

EJERCICIO 3

Parte I

Dados dos sucesos aleatorios A y B, se sabe que: $P(B^C) = \frac{3}{4}$ y $P(A) = P(A/B) = \frac{1}{3}$

(B^C indica el complementario del suceso B).
a) (0.75 puntos) Razone si los sucesos A y B son independientes.
b) (1.25 puntos) Calcule $P(A\cup B)$

Parte II

El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley Normal, con una desviación típica de 0.9 kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes, se obtuvieron los siguientes pesos en kilos:

9.5, 10, 8.5, 10.5, 12.5, 10.5, 12.5, 13, 12.

a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 99%, para el peso medio de los paquetes enviados por esa empresa.
b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0.3 kg, con un nivel de confianza del 90%.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Dibuje la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$2x-3y\geq -13 \quad , \quad 2x+3y\geq 17 \quad , \quad x+y\leq 11 \quad , \quad y\geq 0.$$

b) (1 punto) Determine los vértices de este recinto.
c) (1 punto) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=5x+6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

EJERCICIO 2

a) (1.5 puntos) Dada la función $f(x)=ax^2+bx$, calcule a y b para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1, 4).
b) (1.5 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\frac{2}{x}+Lx$ en el punto de abscisa x = 1.

EJERCICIO 3

Parte I

En una universidad española el 30% de los estudiantes son extranjeros y, de éstos, el 15% están becados. De los estudiantes españoles, sólo el 8% tienen beca. Si se elige, al azar, un alumno de esa universidad:
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea español y no tenga beca?
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que sea extranjero, sabiendo que tiene beca.

Parte II

La duración de un cierto tipo de bombillas eléctricas se distribuye según una ley Normal con desviación típica 1500 horas.
a) (1 punto) Si en una muestra de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la vida media es de 9900 horas, determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la vida media de esta clase de bombillas.
b) (1 punto) Con un nivel de confianza del 99% se ha construido un intervalo para la media con un error máximo de 772.5 horas, ¿qué tamaño de la muestra se ha tomado en este caso?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones asociado al siguiente problema:
"Un monedero contiene 1 euro en monedas de 2, 5 y 10 céntimos; en total hay 22 monedas. Sabiendo que el número de monedas de 5 y 10 céntimos juntas excede en 2 unidades al número de monedas de 2 céntimos, obtenga el número de monedas de cada tipo que hay en el monedero".

b) (1.5 puntos) Resuelva el sistema formado por las ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 6 \\ 2x-y+2z & = & 3 \\ 3x+2y-3z & = & 3 \end{array}\right.$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 9-x^2 & si & x\leq 3 \\ -2x^2+16x-30 & si & x>3 \end{array}\right.$.

a) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (1 punto) Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c) (1 punto) Represéntela gráficamente.

EJERCICIO 3

Parte I

En un centro de Bachillerato, los alumnos de 1º son el 60% del total, y los de 2º el 40% restante. De todos ellos, el 46% posee móvil y el 18% son de 1º y tienen móvil.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un alumno de 1º, elegido al azar, posea móvil.
b) (1 punto) Elegido un alumno, al azar, resulta que tiene móvil, ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º?

Parte II

Una variable aleatoria puede tomar los valores 20, 24 y 30. Mediante muestreo aleatorio simple se forman todas las muestras posibles de tamaño 2.
a) (0.75 puntos) Escriba todas las muestras posibles.
b) (1.25 puntos) Calcule la media y varianza de las medias muestrales.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (2.25 puntos) Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 17 \\ 4x + 5y + z &= 17 \end{aligned}$$

b) (0.75 puntos) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos?

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2$.

a) (1 punto) Obtenga la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = -1$.

b) (0.5 puntos) Halle su punto de inflexión.

c) (1.5 puntos) Dibuje la gráfica de la función, estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos.

EJERCICIO 3.

Parte I

Un estudiante se presenta a un examen en el que debe responder a dos temas, elegidos al azar, de un temario de 80, de los que se sabe 60.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente a los dos?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente al menos a uno de los dos?

Parte II

En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 3.

a) (1 punto) A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7. Halle un intervalo de confianza, al 96%, para la media de la población.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra con la cual se estime la media, con un nivel de confianza del 99% y un error máximo admisible de 2?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x - y \le 1; \qquad x + 2y \ge 7; \qquad x \ge 0; \qquad y \le 5.$$

b) (1 punto) Determine los vértices de este recinto.

c) (1 punto) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo

$$F(x, y) = 2x + 4y - 5$$

y en qué puntos alcanza dichos valores?

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma $f(x) = 1 + L(2x - 1)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) (1 punto) Deduzca razonadamente las asíntotas de la función g, definida de la forma

$$g(x) = \frac{3 - x}{x - 2}$$

c) (0.5 puntos) Determine la posición de la gráfica de la función g respecto de sus asíntotas.

EJERCICIO 3.

Parte I

En los “Juegos Mediterráneos Almería 2005” se sabe que el 5% de los atletas son asiáticos, el 25% son africanos y el resto son europeos. También se sabe que el 10% de los atletas asiáticos, el 20% de los atletas africanos y el 25% de los atletas europeos hablan español.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un atleta, elegido al azar, hable español.

b) (1 punto) Si nos encontramos con un atleta que no habla español, ¿cuál es la probabilidad de que sea africano?

Parte II

a) (0.75 puntos) En una población hay 100 personas: 60 mujeres y 40 hombres. Se desea seleccionar una muestra de tamaño 5 mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Qué composición tendrá dicha muestra?

b) (1.25 puntos) En la población formada por los números 2, 4, 6 y 8, describa las posibles muestras de tamaño 2 seleccionadas por muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule la matriz $C = B \cdot A - A^t \cdot B^t$.

b) (2 puntos) Halle la matriz X que verifique $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x < 1 \\ \frac{2}{x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) (0.5 puntos) Calcule sus asíntotas.

c) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.

a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 5.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

c) (0.5 puntos) Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcule la probabilidad de que el número premiado hoy también termine en 5.

Parte II

En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.

a) (1 punto) Observada una muestra de tamaño 400, tomada al azar, se ha obtenido una media muestral igual a 50. Calcule un intervalo, con el 97% de confianza, para la media de la población.

b) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2x - 3y \leq 6; \qquad x \geq 2y - 4; \qquad x + y \leq 8; \qquad x \geq 0; \qquad y \geq 0.$$

a) (2 puntos) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices.

b) (1 punto) Halle los puntos de esa región en los que la función F(x, y) = 2x + 3y alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

EJERCICIO 2.

El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo *t*, en años, viene dado por:

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \qquad 4 \leq t \leq 7.$$

a) (1.5 puntos) Represente la gráfica de la función *f*.

b) (1.5 puntos) ¿Para qué valor de *t* alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿Para qué valor de *t* alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste?

EJERCICIO 3.

Parte I

Una bolsa contiene tres cartas: una es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca. Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

a) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea blanca?

c) (0.5 puntos) Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

Parte II

Sea la población de elementos {22, 24, 26}.

a) (0.5 puntos) Escriba todas las muestras posibles de tamaño 2, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.

b) (0.75 puntos) Calcule la varianza de la población.

c) (0.75 puntos) Calcule la varianza de las medias muestrales.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (2 puntos) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x+2x\geq 6,\quad x\leq 10-2y,\quad \frac{x}{12}+\frac{y}{3}\geq 1,\quad x\geq 0$$

b) (1 punto) Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x, y) = 4 - 3x - 6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

EJERCICIO 2.

Sea la función $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & si \quad x<0\\ -\frac{1}{x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Dibuje la gráfica de f y estudie su monotonía.

b) (0.75 puntos) Calcule el punto de la curva en el que la pendiente de la recta tangente es –1.

c) (0.75 puntos) Estudie la curvatura de la función.

EJERCICIO 3.

Parte I

En una agrupación musical el 60% de sus componentes son mujeres. El 20% de las mujeres y el 30% de los hombres de la citada agrupación están jubilados.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente de la agrupación, elegido al azar, esté jubilado?

b) (1 punto) Sabiendo que un componente de la agrupación, elegido al azar, está jubilado ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Parte II

La duración de un viaje entre dos ciudades es una variable aleatoria Normal con desviación típica 0.25 horas. Cronometrados 30 viajes entre estas ciudades, se obtiene una media muestral de 3.2 horas.

a) (1.5 puntos) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la media de la duración de los viajes entre ambas ciudades.

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es el error máximo cometido con dicha estimación?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y-z&=-2\\ 2x\quad -z&=\ \ 0\\ -2y+z&=\ \ 4\end{aligned}$$

a) (2 puntos) Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto a sus soluciones.

b) (0.5 puntos) ¿Tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema? Justifíquelo.

c) (0.5 puntos) Obtenga, si existe, una solución del sistema que verifique x = 2y.

EJERCICIO 2.

(3 puntos) Sea f la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & si \quad x<1\\ x^2+bx+3 & si \quad x\geq 1\end{cases}.$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

EJERCICIO 3.

Parte I

Sean A y B dos sucesos del mismo experimento aleatorio tales que

$$P(A)=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{1}{3}\quad y\quad P(A\cup B)=\frac{1}{2}.$$

a) (1.5 puntos) ¿Son A y B incompatibles? ¿Son independientes?

b) (0.5 puntos) Calcule $P[A/(A\cup B)]$

Parte II

Sea X una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4.

a) (1 punto) Para muestras de tamaño 4, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral supere el valor 54?

b) (1 punto) Si $\bar{X}_{16}$ indica la variable aleatoria “media muestral para muestras de tamaño 16”, calcule el valor de a para que $P(50-a\leq \bar{X}_{16}\leq 50+a)$ = 0.9876.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

De las siguientes operaciones, algunas no se pueden realizar; razone por qué. Efectúe las que se puedan realizar.

$$A + B;\ \ A^t + B;\ \ A \cdot B;\ \ A \cdot B^t.$$

b) (2 puntos) Resuelva y clasifique, atendiendo al número de soluciones, el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Determine a y b en la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + 5$ sabiendo que ésta tiene un máximo en el punto (2, 9).

b) (1.5 puntos) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

EJERCICIO 3.

Parte I

En una urna hay 1 bola blanca, 3 rojas y 4 verdes. Se considera el experimento que consiste en sacar primero una bola, si es blanca se deja fuera, y si no lo es se vuelve a introducir en la urna; a continuación se extrae una segunda bola y se observa su color.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 2 bolas del mismo color?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola blanca salga en la 2ª extracción?

Parte II

La estatura de los soldados de un cuartel sigue una distribución Normal con desviación típica 12 cm.

a) (0.5 puntos) Indique la distribución que sigue la media de la estatura de las muestras de soldados de ese cuartel, de tamaño 81.

b) (1.5 puntos) Si se desea estimar la estatura media de los soldados de ese cuartel de forma que el error no sobrepase los 3 cm, ¿cuántos soldados deberán escogerse para formar parte de la muestra si se utiliza un nivel de confianza del 97%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(3 puntos) El estadio del Mediterráneo, construido para la celebración de los “Juegos Mediterráneos Almería 2005”, tiene una capacidad de 20000 espectadores.

Para la asistencia a estos juegos se han establecido las siguientes normas:

El número de adultos no debe superar al doble del número de niños; el número de adultos menos el número de niños no será superior a 5000.

Si el precio de la entrada de niño es de 10 euros y la de adulto 15 euros ¿cuál es la composición de espectadores que proporciona mayores ingresos? ¿A cuánto ascenderán esos ingresos?

EJERCICIO 2.

EJERCICIO 2

(3 puntos) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2};\quad g(x) = (x^2+9)^3;\quad h(x) = L(x^2+1).$$

EJERCICIO 3.

Parte I

Sean A y B dos sucesos independientes tales que P(A) = 0.4 y P(A∩B) = 0.05.

a) (0.5 puntos) Calcule P(B).

b) (0.75 puntos) Calcule $P(A \cap B^C)$.

c) (0.75 puntos) Sabiendo que no ha sucedido B, calcule la probabilidad de que suceda A.

Parte II

El índice de resistencia a la rotura, expresado en kg, de un determinado tipo de cuerda sigue una distribución Normal con desviación típica 15.6 kg. Con una muestra de 5 de estas cuerdas, seleccionadas al azar, se obtuvieron los siguientes índices:

280, 240, 270, 285, 270.

a) (1 punto) Obtenga un intervalo de confianza para la media del índice de resistencia a la rotura de este tipo de cuerdas, utilizando un nivel de confianza del 95%.

b) (1 punto) Si, con el mismo nivel de confianza, se desea obtener un error máximo en la estimación de la media de 5 kg, ¿será suficiente con elegir una muestra de 30 cuerdas?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

a) (1.5 puntos) Determine el valor de x en la matriz B para que se verifique la igualdad

$$A \cdot B = B \cdot A$$

b) (1.5 puntos) Obtenga la matriz C tal que

$$A^t \cdot C = I_2$$

EJERCICIO 2.

El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por la función $f(t) = -4t^2 + 60t - 15$, $1 \leq t \leq 8$.

a) (1 punto) ¿Cuál será el valor de las existencias para $t = 2$? ¿Y para $t = 4$?

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza?

c) (1 punto) ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?

EJERCICIO 3.

Parte I

Sean A y B dos sucesos independientes tales que P(B) = 0.05 y P(A/B) = 0.35.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso A pero no el B?

Parte II

La longitud de los tornillos fabricados por una máquina sigue una ley Normal con desviación típica 0.1 cm. Se ha seleccionado una muestra aleatoria y, con una confianza del 95%, se ha construido un intervalo, para la media poblacional, cuya amplitud es 0.0784 cm.

a) (1 punto) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?

b) (1 punto) Determine el intervalo de confianza, si en la muestra seleccionada se ha obtenido una longitud media de 1.75 cm.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sea el sistema de inecuaciones siguiente:

$x + y \leq 600$, $x \leq 500$, $y \leq 3x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

a) (2 puntos) Represente gráficamente el conjunto de soluciones del sistema y calcule sus vértices.

b) (1 punto) Halle el punto del recinto anterior en el que la función F(x, y) = 38x + 27y alcanza su valor máximo.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & si \quad x \leq 4 \\ 2x - 8 & si \quad x > 4 \end{cases}$.

a) (1.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de esta función.

b) (1.5 puntos) Represéntela gráficamente e indique, a la vista de la gráfica, su monotonía y sus extremos.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un determinado curso el 60% de los estudiantes aprueban Economía y el 45% aprueban Matemáticas. Se sabe además que la probabilidad de aprobar Economía habiendo aprobado Matemáticas es 0.75.

a) (1 punto) Calcule el porcentaje de estudiantes que aprueban las dos asignaturas.

b) (1 punto) Entre los que aprueban Economía ¿qué porcentaje aprueba Matemáticas?

Parte II

El número de horas semanales que los adolescentes dedican a ver la televisión se distribuye según una ley Normal de media 9 horas y desviación típica 4. Para muestras de 64 adolescentes:

a) (0.5 puntos) Indique cuál es la distribución de las medias muestrales.

b) (1.5 puntos) Calcule la probabilidad de que la media de una de las muestras esté comprendida entre 7.8 y 9.5 horas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros.

Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & si \quad x \leq 0 \\ x^2 + ax & si \quad x > 0 \end{cases}$.

a) (1.5 puntos) Para $a = -2$ represente gráficamente la función f, e indique sus extremos relativos.

b) (1.5 puntos) Determine el valor de a para que la función f sea derivable.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un concurso se dispone de cinco sobres; dos de ellos contienen premio y los otros tres no. Se pide a un primer concursante que escoja un sobre y observe si tiene premio, y a un segundo concursante que elija otro de los restantes y observe si tiene premio.

a) (1 punto) Escriba el conjunto de resultados posibles asociado a este experimento e indique la probabilidad de cada uno de ellos.

b) (1 punto) ¿Qué probabilidad tiene el segundo concursante de obtener premio? ¿Cuál es la probabilidad de que ambos concursantes obtengan premio?

Parte II

Se supone que la puntuación obtenida por cada uno de los tiradores participantes en la sede de Gádor de los "Juegos Mediterráneos Almería 2005", es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 que da una media de 35 puntos.

a) (1 punto) Obtenga un intervalo, con un 95% de confianza, para la puntuación media del total de tiradores.

b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de tiradores, con un error inferior a 1 punto y con un nivel de confianza del 99%.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule, si existe, la matriz inversa de B.

b) (2 puntos) Si $A \cdot B = B \cdot A$ y $A + A^t = 3 \cdot I_2$, calcule x e y.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

a) (2 puntos) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

b) (1 punto) Represente gráficamente esta función.

EJERCICIO 3.

Parte I

Juan dispone de dos días para estudiar un examen. La probabilidad de estudiarlo solamente el primer día es del 10%, la de estudiarlo los dos días es del 10% y la de no hacerlo ningún día es del 25%. Calcule la probabilidad de que Juan estudie el examen en cada uno de los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) El segundo día.

b) (0.75 puntos) Solamente el segundo día.

c) (0.75 puntos) El segundo día, sabiendo que no lo ha hecho el primero.

Parte II

El peso de los cerdos de una granja sigue una ley Normal con desviación típica 18 kg.

a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de una muestra para obtener un intervalo de confianza, para la media de la población, de amplitud 5 kg con un nivel de confianza del 95%.

b) (1 punto) Si la media de los pesos de los cerdos de la granja fuera 92 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 100 cerdos estuviese entre 88 y 92 kg?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Una imprenta local edita periódicos y revistas. Para cada periódico necesita un cartucho de tinta negra y otro de color, y para cada revista uno de tinta negra y dos de color. Si sólo dispone de 800 cartuchos de tinta negra y 1100 de color, y si no puede imprimir más de 400 revistas, ¿cuánto dinero podrá ingresar como máximo, si vende cada periódico a 0.9 euros y cada revista a 1.2 euros?

EJERCICIO 2.

Sean las funciones $f(x)=x^2-4x+6$ y $g(x)=2x-x^2$.

a) (2 puntos) Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Represéntelas gráficamente.

b) (1 punto) Determine el valor de x para el que se hace mínima la función $h(x)=f(x)-g(x)$.

EJERCICIO 3.

Parte I

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A^C)=0.60$, $P(B)=0.25$ y $P(A\cup B)=0.55$.

a) (1 punto) Razone si A y B son independientes.

b) (1 punto) Calcule $P(A^C\cup B^C)$.

Parte II

(2 puntos) De 500 encuestados en una población, 350 se mostraron favorables a la retransmisión de debates televisivos en tiempos de elecciones.

Calcule un intervalo de confianza, al 99.5 %, para la proporción de personas favorables a estas retransmisiones.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

a) (1.5 puntos) Calcule $A^{-1}\cdot(2B+3I_2)$.

b) (1.5 puntos) Determine la matriz X para que $X\cdot A=A+I_2$.

EJERCICIO 2.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) (1 punto) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x}+(5x-2)^3$.

b) (1 punto) $g(x)=(x^2+2)\cdot L(x^2+2)$.

c) (1 punto) $h(x)=3^{5x}+e^x$.

EJERCICIO 3.

Parte I

Una urna contiene tres bolas azules y cuatro rojas. Se extraen al azar tres bolas sucesivamente con reemplazamiento.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que las tres sean del mismo color.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que dos sean azules y una roja.

Parte II

El gasto anual, en videojuegos, de los jóvenes de una ciudad sigue una ley Normal de media desconocida μ y desviación típica 18 euros. Elegida, al azar, una muestra de 144 jóvenes se ha obtenido un gasto medio de 120 euros.

a) (0.5 puntos) Indique la distribución de las medias de las muestras de tamaño 144.

b) (0.75 puntos) Determine un intervalo de confianza, al 99 %, para el gasto medio en videojuegos de los jóvenes de esa ciudad.

c) (0.75 puntos) ¿Qué tamaño muestral mínimo deberíamos tomar para, con la misma confianza, obtener un error menor que 1.9?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Represente gráficamente el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 3(y-3);\ 2x+3y \leq 36;\ x \leq 15;\ x \geq 0;\ \ y \geq 0.$$

b) (1 punto) Calcule los vértices del recinto.

c) (0.5 puntos) Obtenga el valor máximo de la función $F(x,y)=8x+12y$ en este recinto e indique dónde se alcanza.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) La gráfica de la función derivada de una función f es la parábola de vértice (0, 2) que corta al eje de abscisas en los puntos (−3, 0) y (3, 0). A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) (1.5 puntos) Calcule los extremos relativos de la función $g(x)=x^3-3x$.

EJERCICIO 3.

Parte I

Laura tiene un dado con tres caras pintadas de azul y las otras tres de rojo. María tiene otro dado con tres caras pintadas de rojo, dos de verde y una de azul. Cada una tira su dado y observan el color.

a) (1 punto) Describa el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.

b) (1 punto) Si salen los dos colores iguales gana Laura; y si sale el color verde, gana María. Calcule la probabilidad que tiene cada una de ganar.

Parte II

a) (1 punto) Los valores:

52, 61, 58, 49, 53, 60, 68, 50, 53

constituyen una muestra aleatoria de una variable aleatoria Normal, con desviación típica 6. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 92%.

b) (1 punto) Se desea estimar la media poblacional de otra variable aleatoria Normal, con varianza 49, mediante la media de una muestra aleatoria. Obtenga el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo de la estimación, mediante un intervalo de confianza al 97%, sea menor o igual que 2.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(3 puntos) El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros.

Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

EJERCICIO 2.

Se considera la función $f(x)=\dfrac{3-x}{2-x}$.

a) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x = 1$.

b) (1 punto) Estudie su monotonía.

c) (1 punto) Calcule sus asíntotas.

EJERCICIO 3.

Parte I

De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: En el 23% de los casos no se llevaba puesto el cinturón de seguridad, en el 65% no se respetaron los límites de velocidad permitidos y en el 30% de los casos se cumplían ambas normas, es decir, llevaban puesto el cinturón y respetaban los límites de velocidad.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, no se haya cumplido alguna de las dos normas.

b) (1 punto) Razone si son independientes los sucesos “llevar puesto el cinturón” y “respetar los límites de velocidad”.

Parte II

(2 puntos) En una muestra aleatoria de 1000 personas de una ciudad, 400 votan a un determinado partido político.

Calcule un intervalo de confianza al 96% para la proporción de votantes de ese partido en la ciudad.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.

b) (1 punto) Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.

c) (1 punto) Determine x para que $A \cdot B = I_2$.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto (1, –3) y tenga el punto de inflexión en $x = -1$.

b) (1.5 puntos) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas.

a) (1 punto) Tomada una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?

b) (1 punto) Si se coge una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga respaldo?

Parte II

(2 puntos) En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 9.

¿De qué tamaño, como mínimo, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97 % y un error máximo admisible igual a 3?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (2 puntos) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad -x+2y \leq 6; \quad x+y \leq 6; \quad x \leq 4.$$

b) (1 punto) Calcule el máximo de la función $F(x,y) = 2x + 2y + 1$ en la región anterior e indique dónde se alcanza.

EJERCICIO 2.

Sea la función f definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & si \quad x \leq 0 \\ x^2 + x & si \quad x > 0 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 3.

Parte I

Sean los sucesos A y B independientes. La probabilidad de que ocurra el suceso B es 0.6. Sabemos también que P (A/B) = 0.3.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso A pero no el B.

Parte II

(2 puntos) Se ha lanzado un dado 400 veces y se ha obtenido 80 veces el valor cinco. Estime, mediante un intervalo de confianza al 95%, el valor de la probabilidad de obtener un cinco.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Calcule $A^{-1}\cdot(B-A^{t})$.

b) (1.5 puntos) Resuelva y clasifique el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2.

Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 1 \\ x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$.

a) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (1 punto) Determine la monotonía de f.
c) (1 punto) Represente gráficamente esta función.

EJERCICIO 3.
Parte I
Una enfermedad afecta a un 5 % de la población. Se aplica una prueba diagnóstica para detectar dicha enfermedad, obteniéndose el siguiente resultado: Aplicada a personas que padecen la enfermedad se obtiene un 96 % de resultados positivos, y aplicada a personas que no la padecen se obtiene un 2 % de resultados positivos. Elegida una persona, al azar, y aplicada la prueba:
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un resultado positivo?
b) (1 punto) Si se obtiene un resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona no padezca la enfermedad?

Parte II
a) (1.25 puntos) Sea la población {1, 5, 7}. Escriba todas las muestras de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.
b) (0.75 puntos) De una población de 300 hombres y 200 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra de tamaño 30 distribuida en los dos estratos, ¿cuál será la composición de la muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.
(3 puntos) Un laboratorio farmacéutico vende dos preparados, A y B, a razón de 40 y 20 euros el kg, respectivamente. Su producción máxima es de 1000 kg de cada preparado. Si su producción total no puede superar los 1700 kg, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcule dichos ingresos máximos.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) (1.5 puntos) Se considera la función $f(x)=ax^2-bx+4$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1, 10).

EJERCICIO 3.

Parte I
Una urna A contiene diez bolas numeradas del 1 al 10, y otra urna B contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8.
Se escoge una urna al azar y se saca una bola.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída tenga el número 2?
b) (1 punto) Si el número de la bola extraída es impar, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B.

Parte II
Se han tomado las tallas de 16 bebés, elegidos al azar, de entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:

51, 50, 53, 48, 49, 50, 51, 48, 50, 51, 50, 47, 51, 51, 49, 51.

La talla de los bebés sigue una ley Normal de desviación típica 2 centímetros y media desconocida.
a) (0.75 puntos) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?
b) (1.25 puntos) Determine un intervalo de confianza, al 97%, para la media poblacional.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sea la región definida por las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\geq 1;\quad -x+2y\geq 0;\quad y\leq 2.$$

a) (2 puntos) Represente gráficamente dicha región y calcule sus vértices.

b) (1 punto) Determine en qué puntos la función $F(x,y)=3x-6y+4$ alcanza sus valores extremos y cuáles son éstos.

EJERCICIO 2.

El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función B definida por

$$B(t)=\begin{cases} -t^2+7t & si \quad 0\leq t<5 \\ 10 & si \quad 5\leq t\leq 8 \end{cases}$$

donde t indica el tiempo transcurrido en años.

a) (2 puntos) Represente gráficamente la función B y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.

b) (1 punto) Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11.25 millones de euros.

EJERCICIO 3.

Parte I

Se dispone de dos urnas A y B. En la urna A hay diez bolas, numeradas del 1 al 10 y en la urna B hay 3 bolas, numeradas del 1 al 3. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna A y si sale cruz se extrae de la B.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de obtener cara y un 5.

b) (0.5 puntos) Halle la probabilidad de obtener un 6.

c) (1 punto) Calcule la probabilidad de obtener un 3.

Parte II

Un fabricante produce tabletas de chocolate cuyo peso en gramos sigue una ley Normal de media 125 g y desviación típica 4 g.

a) (1 punto) Si las tabletas se empaquetan en lotes de 25, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de las tabletas de un lote se encuentre entre 124 y 126 gramos?

b) (1 punto) Si los lotes fuesen de 64 tabletas, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de las tabletas del lote superase los 124 gramos?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix};\; B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};\; C=\begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix};\; D=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix};\; E=\begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}.$$

Calcule los valores de los números reales x, y, z, para que se verifique la siguiente igualdad entre matrices: $E-x\cdot A\cdot B=y\cdot C+z\cdot D$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x)=x^3-3x^2-1$.

a) (1.5 puntos) Determine la monotonía y los extremos relativos de f.

b) (0.75 puntos) Calcule su punto de inflexión.

c) (0.75 puntos) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, represéntela.

EJERCICIO 3.

Parte I

Se conocen los siguientes datos de un grupo de personas, relativos al consumo de un determinado producto:

	Consume	*No consume*
Hombre	10	30
Mujer	25	12

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcule la probabilidad de que:

(0.5 puntos) Sea mujer.

(0.75 puntos) Habiendo consumido el producto, se trate de una mujer.

(0.75 puntos) Sea mujer y no consuma el producto.

Parte II

Una variable aleatoria sigue una ley Normal con media desconocida y desviación típica 2.4. Se quiere estimar la media poblacional, con un nivel de confianza del 93%, para lo que se toman dos muestras de distintos tamaños.

a) (1 punto) Si una de las muestras tiene tamaño 16 y su media es 10.3, ¿cuál es el intervalo de confianza correspondiente?

b) (1 punto) Si con la otra muestra el intervalo de confianza es (9.776, 11.224), ¿cuál es la media muestral? ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (2 puntos) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Explique qué dimensión debe tener la matriz X para que tenga sentido la ecuación matricial $X \cdot A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Resuelva dicha ecuación.

b) (1 punto) Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones que permita encontrar la solución del siguiente problema:

> "En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, un alumno obtuvo una calificación total de 7.2. La puntuación del primer problema fue un 40 % más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones del primero y el segundo. ¿Cuál fue la puntuación de cada problema?"

EJERCICIO 2.

a) (2 puntos) Dada la función $f(x)=a(x-1)^2+bx$, calcule *a* y *b* para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas (1, 2) y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa *x* = 2.

b) (1 punto) Calcule $g''(2)$ *siendo* $g(x)=\frac{1}{x}-x$.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes, A y B. Se sabe que $P(A\cap B)=0.18$ y $P(A/B)=0.30$.

a) (1 punto) Calcule las probabilidades de A y de B.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de esos dos sucesos.

Parte II

De una población Normal, con media desconocida y varianza 36, se extrae una muestra aleatoria que resulta tener una media muestral de 173.

a) (1 punto) Obtenga un intervalo de confianza del 97% para la media poblacional, si el tamaño de la muestra es 64.

b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra, si se desea que el error cometido al estimar la media poblacional sea inferior a 1.2, para un nivel de confianza del 95%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Se considera el recinto definido por las inecuaciones

$$y-x\le 4;\quad x-y\le 4;\quad x+y\le 12;\quad x\ge 0;\quad y\ge 0.$$

a) (2 puntos) Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) (1 punto) Dada la función objetivo $F(x,y)=\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y$, determine los valores máximo y mínimo de *F* y los puntos del recinto donde se alcanzan.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) De una función *f* se sabe que la gráfica de su función derivada, *f '*, es la recta de ecuación $y = -2x + 4$. Estudie razonadamente la monotonía de la función *f*, a la vista de la gráfica de la derivada.

b) (1.5 puntos) Dada la función $g(x)=\frac{4x-4}{x+4}$, calcule la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa *x* = 0.

EJERCICIO 3.

Parte I

En una empresa, el 65% de la plantilla son hombres; de ellos, el 80% usan el ordenador. Se sabe que el 83.5% de la plantilla de la empresa usa el ordenador.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que una persona de esa empresa, elegida al azar, sea un hombre que no utiliza el ordenador.

b) (1 punto) Seleccionada una mujer de esa empresa, al azar, calcule la probabilidad de que utilice el ordenador.

Parte II

Las calificaciones obtenidas por los estudiantes de Matemáticas siguen una ley Normal de media desconocida y desviación típica 1.19. Para una muestra de esa población se obtiene que (6.801, 6.899) es un intervalo de confianza, al 92%, para la media poblacional.

a) (0.5 puntos) Determine la media muestral.

b) (1.5 puntos) Determine el tamaño de la muestra.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.
b) (1 punto) Igualmente para que $B + C = A^{-1}$.
c) (1 punto) Determine x para que $A + B + C = 3 \cdot I_2$.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + a & si \quad x \leq 0 \\ x^2 + bx + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$.
Halle a y b para que la función sea continua y derivable.
b) (1.5 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = \frac{3}{(2x-5)^2} + L(1-x), \quad h(x) = \frac{e^x}{x^3+1}$$

EJERCICIO 3.

Parte I

Se tienen dos dados, uno (A) con dos caras rojas y cuatro verdes, y otro (B) con dos caras verdes y cuatro rojas. Se lanza una moneda; si sale cara se arroja el dado A y si sale cruz el dado B.
a) (1 punto) Halle la probabilidad de obtener una cara de color rojo.
b) (1 punto) Si sabemos que ha salido una cara de color verde en el dado, ¿cuál es la probabilidad de que en la moneda haya salido cara?

Parte II

(2 puntos) El salario de los trabajadores de una ciudad sigue una distribución Normal con desviación típica 15 euros. Se quiere calcular un intervalo de confianza para el salario medio con un nivel de confianza del 98%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud, como máximo, de 6 euros.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Un Ayuntamiento concede licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.
Para ello la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 euros y la de tipo B 300000 euros.
Si el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20000 euros y por una de tipo B a 40000 euros, ¿cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener un beneficio máximo?

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Determine dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$.
Calcule el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5.
b) (1.5 puntos) Calcule $g'(3)$, siendo $g(x) = 2x \cdot e^{3x-1}$.

EJERCICIO 3.

Parte I

En una población, el porcentaje de personas que ven un determinado programa de televisión es del 40%. Se sabe que el 60% de las personas que lo ven tiene estudios superiores y que el 30% de las personas que no lo ven no tiene estudios superiores.
a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que una persona vea dicho programa y tenga estudios superiores.
b) (1.25 puntos) Halle la probabilidad de que una persona que tiene estudios superiores vea el citado programa.

Parte II

(2 puntos) En una encuesta representativa realizada a 1230 personas de una ciudad, se obtuvo como resultado que 654 de ellas van al cine los fines de semana.
Calcule un intervalo de confianza, al 97%, para la proporción de asistencia al cine los fines de semana en dicha ciudad.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Determine la matriz inversa de A.

b) (2 puntos) Halle los valores de x, y, z para los que se cumple $A \cdot X = Y$.

EJERCICIO 2.

Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, determine:

a) (1.5 puntos) Su monotonía y sus extremos relativos.

b) (1.5 puntos) Su curvatura y su punto de inflexión.

EJERCICIO 3.

Parte I

La baraja española consta de diez cartas de oros, diez de copas, diez de espadas y diez de bastos. Se extraen dos cartas. Calcule razonadamente la probabilidad de que, al menos, una de las dos cartas sea de espadas en los siguientes supuestos:

a) (1 punto) Si se extraen las cartas con reemplazamiento.

b) (1 punto) Si se extraen las cartas sin reemplazamiento.

Parte II

En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17.4 años. Se sabe que la desviación típica de la población Normal de la que procede esa muestra es de 2 años.

a) (1 punto) Obtenga un intervalo de confianza al 95% para la edad media de la población.

b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, tenga de amplitud a lo sumo 0.5?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Consideramos el recinto del plano limitado por las siguientes inecuaciones:

$$y - x \leq 4; \quad y + 2x \geq 7; \quad -2x - y + 13 \geq 0; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

a) (2 puntos) Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) (1 punto) Halle en qué puntos de ese recinto alcanza los valores máximo y mínimo la función $F(x, y) = 4x + 2y - 1$.

EJERCICIO 2.

a) (2 puntos) Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto (1, 5) sea la recta $y = 3x + 2$.

b) (1 punto) Para $g(x) = e^{1-x} + L(x + 2)$, calcule $g'(1)$.

EJERCICIO 3.

Parte I

En una urna hay cuatro bolas blancas y dos rojas. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna y si sale cruz se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas.

b) (1 punto) Halle la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.

Parte II

En una granja avícola se ha tomado una muestra aleatoria de 200 polluelos de pato, entre los cuales se encontraron 120 hembras.

a) (1.5 puntos) Halle un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la proporción de hembras entre estos polluelos.

b) (0.5 puntos) Razone, a la vista del intervalo encontrado, si a ese nivel de confianza puede admitirse que la verdadera proporción de hembras de pato en esa granja es 0.5.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$$4x + 3y \geq 60, \qquad y \leq 30, \qquad x \leq \frac{10+y}{2}, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.

b) (0.5 puntos) Maximice en esa región factible la función objetivo $F(x, y) = x + 3y$.

c) (0.5 puntos) ¿Pertenece el punto (11, 10) a la región factible?

EJERCICIO 2.

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x \leq 1 \\ x^2 + mx + 5 & si \quad x > 1 \end{cases}$.

a) (1 punto) Calcule m para que la función sea continua en $x = 1$.

b) (1 punto) Para ese valor de m, ¿es derivable la función en $x = 1$?

c) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica

$$P(A \cap B) = 0.1, \qquad P(A^C \cap B^C) = 0.6, \qquad P(A/B) = 0.5.$$

a) (0.75 puntos) Calcule P(B).

b) (0.75 puntos) Calcule $P(A \cup B)$.

c) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

Parte II

Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley Normal de media 36 y desviación típica 4.8.

a) (1 punto) Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

CURSO 2006-2007 3

OPCIÓN B

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Halle la matriz A que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$.

b) (1.5 puntos) Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes: $x - 3y + 2z = 0$; $-2x + y - z = 0$; $x - 8y + 5z = 0$.

EJERCICIO 2.

a) (2 puntos) Sea la función definida para todo número real x por $f(x) = ax^3 + bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 1) y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es −3.

b) (1 punto) Si en la función anterior $a = \frac{1}{3}$ y $b = -4$, determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

EJERCICIO 3.

Parte I

Una urna A contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra urna B contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se extrae, al azar, una bola de una de las urnas.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

b) (1 punto) Si la bola extraída resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Parte II

Se sabe que (45.13, 51.03) es un intervalo de confianza, al 95%, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 15.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es el error cometido?

b) (1.5 puntos) Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1.8.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Calcule el valor de b para que $B^2 = I_2$.

b) (2 puntos) Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 1+z \\ 2x+z & = & 2+y \\ y & = & z \end{array}\right\}$

EJERCICIO 2.

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x+1} & si \quad x \leq 0 \\ x^2+2x-3 & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Estudie su derivabilidad en x = 0.

b) (1.5 puntos) Determine si existen asíntotas y obtenga sus ecuaciones.

EJERCICIO 3.

Parte I

(2 puntos) En un espacio muestral se consideran dos sucesos A y B tales que P(A∪B) = 1, P(A∩B) = $\frac{1}{6}$ y P(A/B) = $\frac{1}{3}$. Halle la probabilidad del suceso A y la del suceso B.

Parte II

En una Universidad se toma, al azar, una muestra de 400 alumnos y se observa que 160 de ellos han aprobado todas las asignaturas.

a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para estimar el porcentaje de alumnos de esa Universidad que aprueban todas las asignaturas.

b) (1 punto) A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error no sea superior a 0.04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos alumnos, como mínimo, ha de tener la muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera requiere 2.5 m^2 de cristal, mientras que cada luna trasera requiere 2 m^2.

La producción de una luna delantera precisa 0.3 horas de máquina de corte y cada luna trasera 0.2 horas. La empresa dispone de 1750 m^2 de cristal por semana y 260 horas semanales de máquina de corte.

Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras que de lunas traseras.

Determine cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas sea máximo.

EJERCICIO 2.

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$.

a) (2 puntos) Determine los extremos relativos de f; estudie la monotonía y la curvatura.

b) (1 punto) Represente gráficamente la función f.

EJERCICIO 3.

Parte I

Un experimento aleatorio consiste en lanzar simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) (0.5 puntos) Obtener dos unos.

b) (0.5 puntos) Obtener al menos un dos.

c) (0.5 puntos) Obtener dos números distintos.

d) (0.5 puntos) Obtener una suma igual a cuatro.

Parte II

(2 puntos) Para realizar una encuesta en un Instituto se selecciona, aleatoriamente, una muestra de 50 alumnos y se les pregunta si tienen reproductores de mp3, contestando afirmativamente 20 de ellos. Calcule un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de alumnos que poseen reproductores de mp3 en la población total de alumnos del Instituto.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles.

Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones adecuado que permite calcular cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller.

b) (2 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $A\cdot X+B^t=B$, donde X es una matriz cuadrada de orden 2.

EJERCICIO 2.

Se considera la función definida por $f(x)=\begin{cases}2x^2-8x+6 & si \quad x\le 1\\ -2x^2+8x-6 & si \quad x>1\end{cases}$

a) (1.5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f.

b) (1 punto) Represente la gráfica de f.

c) (0.5 puntos) Indique los extremos relativos de la función.

EJERCICIO 3.

Parte I

El 30% de los clientes de una tienda de música solicita la colaboración de los dependientes y el 20% realiza una compra antes de abandonar la tienda. El 15% de los clientes piden la colaboración de los dependientes y hacen una compra.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un cliente ni compre, ni solicite la colaboración de los dependientes.

b) (1 punto) Sabiendo que un cliente ha realizado una compra, ¿cuál es la probabilidad de que no haya solicitado colaboración a los dependientes?

Parte II

Se ha lanzado al aire una moneda 200 veces y se ha obtenido cara en 120 ocasiones.

a) (1 punto) Estime, mediante un intervalo de confianza, al 90%, la probabilidad de obtener cara.

b) (1 punto) Se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error cometido sea inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 97%. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

La candidatura de un determinado grupo político para las elecciones municipales debe cumplir los siguientes requisitos: el número total de componentes de la candidatura debe estar comprendido entre 6 y 18 y el número de hombres (x) no debe exceder del doble del número de mujeres (y).

a) (2.5 puntos) Represente el recinto asociado a estas restricciones y calcule sus vértices.

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener una candidatura que cumpla esas condiciones?

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x-k}{x+1} & si \quad x>0\\ x^2+2x+1 & si \quad x\le 0\end{cases}$

a) (2 puntos) Calcule el valor de k para que la función f sea continua en x = 0. Para ese valor de k, ¿es f derivable en x =0?

b) (1 punto) Para k = 0, calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un Instituto se pueden practicar dos deportes: fútbol y baloncesto. Se sabe que el 48% de los alumnos practica fútbol pero no baloncesto, que el 15% practica baloncesto pero no fútbol y que el 28% no practica ninguno de los dos. Si se toma, al azar, un alumno de ese Instituto, calcule la probabilidad de que:

a) (0.75 puntos) Practique fútbol.

b) (0.5 puntos) Practique alguno de los dos deportes.

c) (0.75 puntos) No practique fútbol, sabiendo que practica baloncesto.

Parte II

Con los datos de una muestra aleatoria se estima que el porcentaje de hogares con conexión a Internet es del 30%, con un error máximo de la estimación de 0.06 y un nivel de confianza del 93%.

a) (0.5 puntos) Obtenga el intervalo de confianza, al 93%, de la proporción de hogares con conexión a Internet.

b) (1.5 puntos) Calcule el tamaño mínimo de la muestra utilizada.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) (1.5 puntos) Calcule $B \cdot B^t - A \cdot A^t$.

b) (1.5 puntos) Halle la matriz X que verifica $(A \cdot A^t) \cdot X = B$.

EJERCICIO 2.

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & si \quad 0 \leq x \leq 6 \\ \dfrac{5x}{2} - 15 & si \quad 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) (0.75 puntos) Represente la función f.

b) (0.75 puntos) Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

c) (0.75 puntos) ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

d) (0.75 puntos) Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

EJERCICIO 3.

Parte I

Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos:

A: "Obtener al menos dos veces cara" y B: "Obtener cara en el segundo lanzamiento".

a) (1 punto) Describa el espacio muestral asociado al experimento. Calcule P(A) y P(A∪B).

b) (1 punto) Los sucesos A y B, ¿son independientes?, ¿son incompatibles?

Parte II

En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal con desviación típica 8. Se ha elegido, al azar, una muestra de tamaño 100 y su media ha sido 67.

a) (1 punto) Calcule el intervalo de confianza, al 93%, para la media de la población.

b) (1 punto) ¿Cuántos datos, como mínimo, son necesarios para estimar, con un nivel de confianza del 99%, la media de la población con un error no superior a 2?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Una fábrica produce bombillas de bajo consumo que vende a 1 euro cada una, y focos halógenos que vende a 1.5 euros. La capacidad máxima de fabricación es de 1000 unidades, entre bombillas y focos, si bien no se pueden fabricar más de 800 bombillas ni más de 600 focos.

Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. Determine cuántas bombillas y cuántos focos debe producir para obtener los máximos ingresos posibles y cuáles serían éstos.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 3$. Calcule los coeficientes a y b y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

b) (1.5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \frac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un tribunal se han examinado 140 alumnos de un Instituto A y 150 de otro Instituto B. Aprobaron el 80% de los alumnos del A y el 72% del B.

a) (1 punto) Determine el tanto por ciento de alumnos aprobados por ese tribunal.

b) (1 punto) Un alumno, elegido al azar, no ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al Instituto B?

Parte II

(2 puntos) Para estimar la proporción de estudiantes de una Universidad que está a favor de un aumento del importe de las becas, se entrevistó, aleatoriamente, a 500 estudiantes, de los cuales 465 respondieron afirmativamente. Calcule el intervalo de confianza, al 98%, en el cual se hallará la proporción de la población universitaria que está a favor del aumento de la cuantía de las becas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a para que A^2 sea la matriz nula.

a) (2 puntos) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $(M^{-1} \cdot M^t)^2$.

EJERCICIO 2.

Sea la función *f* definida mediante $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

a) (0.5 puntos) Determine los puntos de corte con los ejes.
b) (1 punto) Estudie su curvatura.
c) (1 punto) Determine sus asíntotas.
d) (0.5 puntos) Represente la función.

EJERCICIO 3.

Parte I

Laura tiene en su monedero 6 monedas francesas, 2 italianas y 4 españolas. Vicente tiene 9 francesas y 3 italianas. Cada uno saca, al azar, una moneda de su monedero y observa la nacionalidad.

a) (0.5 puntos) Obtenga el espacio muestral asociado al experimento.
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las monedas extraídas no sean de la misma nacionalidad?
c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las monedas extraídas sea francesa?

Parte II

Se desea estimar la proporción de individuos zurdos en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos resultando que 45 de ellos son zurdos.

a) (1.5 puntos) Calcule, usando un nivel de confianza del 97%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de individuos zurdos de la población.
b) (0.5 puntos) ¿Sería mayor o menor el error de estimación si se usara un nivel de confianza del 95%? Razone la respuesta.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de tartas, A y B. Para hacer una hornada de tartas del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, mientras que para hacer una hornada de tartas del tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0.5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Sabiendo que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 € y de 30 € al vender una hornada del tipo B, determine cuántas hornadas de cada tipo debe hacer y vender para maximizar sus beneficios.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) La gráfica de la derivada de una función *f* es la recta que pasa por los puntos (0, –3) y (4, 0). Estudie la monotonía de la función *f*.

b) (1.5 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = (3x+1)^3 \cdot L(x^2+1); \qquad h(x) = \frac{e^x}{7x^5 - 4}$$

EJERCICIO 3.

Parte I

De los 150 coches de un concesionario, 90 tienen motor diésel y el resto de gasolina. De los coches con motor diésel, 72 son nuevos y el resto usados; mientras que de los coches con motor de gasolina hay el mismo número de coches nuevos que de usados. Se elige, al azar, un coche de dicho concesionario; calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Sea nuevo.
b) (1 punto) Tenga motor diésel, sabiendo que es usado.

Parte II

(2 puntos) Una variable aleatoria sigue una ley Normal con desviación típica 6. ¿De qué tamaño, como mínimo, se debe elegir una muestra que nos permita estimar la media de esa variable con un error máximo de 2 y una confianza del 99%?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) (1.5 puntos) Calcule la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el punto de abscisa x = –1.

b) (1.5 puntos) Halle los valores de a y b para que la función $g(x) = ax + \frac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto (1, 2).

EJERCICIO 3.

Parte I

El examen de Matemáticas de un alumno consta de dos ejercicios. La probabilidad de que resuelva el primero es del 30%, la de que resuelva ambos es del 10%, y la de que no resuelva ninguno es del 35%. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) (1 punto) Que el alumno resuelva el segundo ejercicio.

b) (1 punto) Que resuelva el segundo ejercicio, sabiendo que no ha resuelto el primero.

Parte II

La longitud de los cables de los auriculares que fabrica una empresa es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 4.5 cm. Para estimar la longitud media se han medido los cables de una muestra aleatoria de 9 auriculares y se han obtenido las siguientes longitudes, en cm:

205, 198, 202, 204, 197, 195, 196, 201, 202.

a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la longitud media de los cables.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estos auriculares para que el error de estimación de la longitud media sea inferior a 1 cm, con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Un nutricionista informa a un individuo que, en cualquier tratamiento que siga, no debe ingerir diariamente más de 240 mg de hierro ni más de 200 mg de vitamina B. Para ello están disponibles píldoras de dos marcas, P y Q. Cada píldora de la marca P contiene 40 mg de hierro y 10 mg de vitamina B, y cuesta 6 céntimos de euro; cada píldora de la marca Q contiene 10 mg de hierro y 20 mg de vitamina B, y cuesta 8 céntimos de euro.

Entre los distintos tratamientos, ¿cuál sería el de máximo coste diario?

EJERCICIO 2.

Dada la función $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$, determine:

a) (1.5 puntos) La monotonía y la curvatura de *f*.

b) (0.5 puntos) Los puntos donde la función alcanza sus extremos relativos.

c) (1 punto) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = –1.

EJERCICIO 3.

Parte I

Se consideran los sucesos A y B.

a) (0.75 puntos) Exprese, utilizando las operaciones con sucesos, los siguientes sucesos:

1. Que no ocurra ninguno de los dos.
2. Que ocurra al menos uno de los dos.
3. Que ocurra B, pero que no ocurra A.

b) (1.25 puntos) Sabiendo que P(A) = 0.5, P(B) = 0.5 y P(A/B) = 0.3, halle $P(A \cup B)$.

Parte II

(2 puntos) Se ha aplicado un medicamento a una muestra de 200 enfermos y se ha observado una respuesta positiva en 140 de ellos. Estímese, mediante un intervalo de confianza del 99%, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se aplicase a la población de la que se ha extraído la muestra.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1.5 puntos) Calcule los valores de *a* y *b* para que A·B = B·A.

b) (1.5 puntos) Para *a* = 1 y *b* = 0, resuelva la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$.

EJERCICIO 2.

Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & si\ \ x < 2 \\ 2x^2 - 10x & si\ \ x \geq 2 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Halle el dominio de *f*.

b) (1.25 puntos) Estudie la derivabilidad de *f* en x = 2.

c) (1.25 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 0.

EJERCICIO 3.

Parte I

a) (1 punto) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que P(A) = 0.5, que P(B) = 0.4 y que P(A∪B) = 0.8, determine P(A/B).

b) (1 punto) Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que P(C) = 0.3 y P(D) = 0.8 y que C y D son independientes, determine P(C∪D).

Parte II

El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media μ días y desviación típica 3 días.

a) (1 punto) Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8.1 días.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \leq 6; \quad 4x + y \leq 10; \quad -x + y \leq 3; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

y determine sus vértices.

b) (1 punto) Calcule el máximo de la función *f* (x, y) = 4x + 2y − 3 en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.

EJERCICIO 2.

Sea la función *f* definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si\ \ x < 1 \\ L(x) & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$.

a) (1.5 puntos) Determine *a* y *b* sabiendo que *f* es continua y tiene un mínimo en x = −1.

b) (1.5 puntos) Para *a* = −1 y *b* = 1, estudie la derivabilidad de *f* en x = −1 y x = 1.

EJERCICIO 3.

Parte I

Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

b) (1 punto) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

Parte II

Sea la población {1, 2, 3, 4}.

a) (1 punto) Construya todas las muestras posibles de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple.

b) (1 punto) Calcule la varianza de las medias muestrales.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Un joyero fabrica dos modelos de anillos. El modelo A se hace con 1 gramo de oro y 1.5 gramos de plata. El modelo B lleva 1.5 gramos de oro y 1 gramo de plata. El joyero sólo dispone de 750 gramos de cada metal y piensa fabricar, al menos, 150 anillos del tipo B que ya tiene encargados. Sabiendo que el beneficio de un anillo del tipo A es de 50 € y del tipo B es de 70 €, ¿cuántos anillos ha de fabricar de cada tipo para obtener el beneficio máximo y cuál será éste?

EJERCICIO 2.

El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$B(x) = -3x^2 + 120x + 675, \qquad x \geq 0$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) (0.75 puntos) Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.

b) (0.75 puntos) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?

c) (0.75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio de la empresa.

d) (0.75 puntos) Represente gráficamente la función B.

EJERCICIO 3.

Parte I

En una población, donde el 45% son hombres y el resto mujeres, se sabe que el 10% de los hombres y el 8% de las mujeres son inmigrantes.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de inmigrantes hay en esta población?

b) (1 punto) Si se elige, al azar, un inmigrante de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Parte II

(2 puntos) Tomada al azar una muestra de 90 alumnos de un Instituto se encontró que un tercio habla inglés.

Halle, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de alumnos de ese Instituto que habla inglés.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Dadas las matrices $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcule los productos $C \cdot F$ y $F \cdot C$.

b) (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X que verifique la ecuación $X \cdot A^{-1} - B = C$.

EJERCICIO 2.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) (0.75 puntos) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot e^{7x}$

b) (0.75 puntos) $g(x) = 3^x \cdot L(x)$

c) (0.75 puntos) $h(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^5 - 6x)^6$

d) (0.75 puntos) $i(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-2}$

EJERCICIO 3.

ParteI

Una caja contiene 12 bombillas, de las cuales 4 están fundidas. Se eligen, al azar y sin reemplazamiento, tres bombillas de esa caja.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ninguna de las tres bombillas esté fundida.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que las tres bombillas estén fundidas.

Parte II

El tiempo de utilización diaria de ordenador entre los empleados de una empresa sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica 1.2 horas.

a) (1.25 puntos) Una muestra aleatoria de 40 empleados tiene una media del tiempo de utilización de 2.85 horas diarias. Determine un intervalo de confianza, al 96%, para la media del tiempo de utilización diaria de ordenador.

b) (0.75 puntos) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra para estimar la media del tiempo de utilización diaria del ordenador con un error no superior a 0.75 horas y el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

De las restricciones que deben cumplir las variables x e y en un problema de programación lineal se deduce el siguiente conjunto de inecuaciones:

$$2y - x \leq 8, \quad x + y \geq 13, \quad y + 4x \leq 49, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

a) (1.5 puntos) Represente gráficamente el recinto determinado por estas inecuaciones.

b) (1 punto) Determine los vértices del recinto.

c) (0.5 puntos) Obtenga los valores extremos de la función *F(x, y) = 3x – 4y + 12* en ese recinto e indique en qué punto o puntos se alcanza cada extremo.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

a) (1 punto) Determine sus puntos de corte con los ejes.

b) (1 punto) Calcule sus extremos relativos y su punto de inflexión.

c) (1 punto) Represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3.

Parte I

En un aula de informática hay 20 puestos de ordenador. De ellos, 10 son compartidos y otros 10 son individuales. De los puestos compartidos, hay 3 en los que el ordenador no funciona, de los individuales hay 2 en los que el ordenador no funciona.

a) (1 punto) Seleccionado al azar un puesto en el aula, ¿cuál es la probabilidad de que no funcione el ordenador?

b) (1 punto) Si se elige al azar un puesto en el que funciona el ordenador, ¿cuál es la probabilidad de que sea compartido?

Parte II

El peso, en kg, de los alumnos de primaria de un colegio sigue una distribución Normal de media 28 kg y desviación típica 2.7 kg.

Consideremos muestras aleatorias de 9 alumnos.

a) (0.5 puntos) ¿Qué distribución sigue la media de las muestras?

b) (1.5 puntos) Si elegimos, al azar, una de esas muestras, ¿cuál es la probabilidad de que su media esté comprendida entre 26 y 29 kg?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (2 puntos) Halle la matriz X que verifica la ecuación $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) (1 punto) Determine los valores de x e y que cumplen la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & si \ \ x \leq 1 \\ ax + b & si \ \ x > 1 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Calcule a y b, sabiendo que $f(2) = 7$ y que f es continua en x = 1.

b) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = –1.

EJERCICIO 3.

Parte I

Se dispone de los siguientes datos sobre el equipamiento de los hogares de una ciudad: En el 60% de los hogares se puede ver la TDT (Televisión Digital Terrestre) y el 70% de los hogares dispone de ordenador. De entre los hogares que disponen de ordenador, el 80% puede ver la TDT.

a) (1 punto) ¿Son sucesos independientes "disponer de ordenador" y "poder ver la TDT"?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de hogares no disponen de ordenador ni pueden ver la TDT?

Parte II

(2 puntos) En un centro de anillamiento de aves se ha detectado que en una muestra de 250 ejemplares de una especie, 60 son portadoras de una bacteria.

Obtenga un intervalo de confianza, al 97%, para la proporción de aves de esa especie que son portadoras de la bacteria.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Una empresa produce botellas de leche entera y de leche desnatada y tiene una capacidad de producción máxima de 6000 botellas al día. Las condiciones de la empresa obligan a que la producción de botellas de leche desnatada sea, al menos, la quinta parte de las de leche entera y, como máximo, el triple de la misma. El beneficio de la empresa por botella de leche entera es de 20 céntimos y por botella de leche desnatada es de 32 céntimos. Suponiendo que se vende toda la producción, determine la cantidad de botellas de cada tipo que proporciona un beneficio máximo y el importe de este beneficio.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^x & si\ \ x \le 0 \\ x^2 + x + 1 & si\ \ x > 0 \end{cases}$.

a) (1 punto) ¿Es f continua en x = 0? ¿Es continua en su dominio?

b) (1 punto) ¿Es f derivable en x = 0? ¿Es derivable en su dominio?

c) (1 punto) Estudie la monotonía de f.

EJERCICIO 3.

Parte I

(2 puntos) Ana y Blas deciden jugar con un dado de la siguiente forma:

“Ana lanza el dado y, si saca un 6, gana y se acaba el juego. En caso contrario lanza Blas, que gana si saca un 2 o un 3, y también se acaba el juego. De no ocurrir esto, la partida se acaba sin ganador.

Halle la probabilidad de los siguientes sucesos: “gana Ana”, “gana Blas”, “ninguno gana”.

Parte II

(2 puntos) En una muestra representativa de 1200 residentes de una ciudad, 450 utilizan habitualmente el transporte público. Obtenga el intervalo de confianza, al 90%, de la proporción de residentes en la ciudad que utilizan habitualmente el transporte público.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean A y B las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule $(A + B)\cdot(A - B)$.

b) (2 puntos) Determine la matriz X, cuadrada de orden 2, en la ecuación matricial $(A + 2B)\cdot X = 3I_2$.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$ en el punto de abscisa 1.

b) (1.5 puntos) Sea la función $g(x) = x^3 + ax^2 + b$. Calcule a y b sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto (2, 5).

EJERCICIO 3.

Parte I

En una industria de calzado se producen botas y sandalias. De cada 12 pares producidos, 7 pares son botas y 5 de sandalias. La probabilidad de que un par de botas sea defectuoso es 0.08 y de que lo sea un par de sandalias es 0.03. Se escoge al azar un par y resulta ser “no defectuoso”.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido un par de botas?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido un par de sandalias?

Parte II

El consumo, en gramos, de un cierto producto sigue una ley Normal con varianza 225 g^2.

a) (1 punto) A partir de una muestra de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral igual a 175 g. Halle un intervalo de confianza, al 90%, para la media del consumo.

b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 95%, tenga una amplitud máxima de 5?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) En un comercio de bricolaje se venden listones de madera de tres longitudes: 0.90 m, 1.50 m y 2.40 m, cuyos precios respectivos son 4 euros, 6 euros y 10 euros. Un cliente ha comprado 19 listones, con una longitud total de 30 m, que le han costado 126 euros en total.

Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar cuántos listones de cada longitud ha comprado este cliente.

b) (1.5 puntos) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-\ y-z=0 \\ 2x-2y+z=18 \\ x\qquad -3z=0 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Halle las funciones derivadas de las funciones definidas por las siguientes expresiones:

$$f(x)=(2x^2-3)^3;\quad g(x)=\frac{\ln(x)}{x};\quad h(x)=x\cdot e^{3x}.$$

b) (1.5 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de la función $m(x)=\frac{2x+3}{x-4}$

EJERCICIO 3.

Parte I

Lena y Adrián son aficionados al tiro con arco. Lena da en el blanco con probabilidad $\frac{7}{10}$ y Adrián con probabilidad $\frac{9}{13}$. Si ambos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) (0.6 puntos) "Ambos dan en el blanco".

b) (0.6 puntos) "Sólo Lena da en el blanco".

c) (0.8 puntos) "Al menos uno da en el blanco".

Parte II

En una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido, para la edad, una media de 17.5 años. Se sabe que la edad en la población, de la que procede esa muestra, sigue una distribución Normal con una desviación típica de 0.8 años.

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 94%, para la edad media de la población.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

En un examen de Matemáticas se propone el siguiente problema:

"Indique dónde se alcanza el mínimo de la función F(x, y) = 6x +3y – 2 en la región determinada por las restricciones 2x + y ≥ 6; 2x + 5y ≤ 30; 2x – y ≤ 6."

a) (2.5 puntos) Resuelva el problema.

b) (0.5 puntos) Ana responde que se alcanza en (1, 4) y Benito que lo hace en (3, 0). ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en (1, 4)? ¿Es cierto que se alcanza en (3, 0)?

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Sea la función $f(x)=\begin{cases}1-2x & si\ \ x\leq 0\\ \frac{1}{x+1} & si\ \ x>0\end{cases}$.

Estudie su continuidad y su derivabilidad.

b) (1.5 puntos) Se consideran las funciones: $g(x)=\ (2x\ +\ 1)^3,\ h(x)=\frac{x-1}{2^x}$.

Halle sus funciones derivadas.

EJERCICIO 3.

Parte I

Una encuesta realizada por un banco muestra que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y el 20% tiene un préstamo de cada tipo. Se elige, al azar, un cliente de ese banco.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario, sabiendo que no tiene un préstamo personal.

Parte II

El cociente intelectual de los alumnos de un centro educativo se distribuye según una ley Normal de media 110 y desviación típica 15. Se extrae una muestra aleatoria simple de 25 alumnos.

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la media del cociente intelectual de los alumnos de esa muestra sea superior a 113?

b) (0.5 puntos) Razone cómo se vería afectada la respuesta a la pregunta anterior si el tamaño de la muestra aumentase.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Obtenga los valores máximo y mínimo, indicando los puntos donde se alcanzan, de la función objetivo F(x, y) = x – y en la región definida por las restricciones

$$6x + y \geq 3; \quad 2x + y \leq 2; \quad y \leq \frac{5}{4}; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = x^3 - 1$.

a) (1 punto) Calcule los puntos de corte de la gráfica con los ejes, su monotonía y extremos relativos, si los tuviese.

b) (1 punto) Determine su curvatura y punto de inflexión.

c) (1 punto) Halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente tiene de pendiente 3.

EJERCICIO 3.

Parte 1

Sean A y B dos sucesos tales que P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, $P(A \cup B) = 0.65$. Conteste razonadamente las siguientes preguntas:

a) (0.5 puntos) ¿Son incompatibles A y B?

b) (0.5 puntos) ¿Son independientes A y B?

c) (1 punto) Calcule $P(A/B^C)$.

Parte II

Una variable aleatoria X se distribuye de forma Normal, con media μ y desviación típica $\sigma = 0.9$.

a) (1 punto) Una muestra aleatoria de tamaño 9 ha proporcionado los siguientes valores de X:

7.0, 6.4, 8.0, 7.1, 7.3, 7.4, 5.6, 8.8, 7.2.

Obtenga un intervalo de confianza para la media μ con un nivel de confianza del 97%.

b) (1 punto) Con otra muestra, se ha obtenido que un intervalo de confianza para μ, al 95%, es el siguiente (6.906, 7.494). ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizada?

CURSO 2008-2009 2

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Esas latas de tomate se venden a 1, 1.8 y 3.3 euros, respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 kg y nos cuestan 35.6 euros. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.

a) (1 punto) Plantee el sistema de ecuaciones que resolvería el problema anterior.

b) (2 puntos) Resuelva el problema.

EJERCICIO 2.

Sea la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x < 1 \\ x-1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$.

a) (1 punto) Represente gráficamente la función.

b) (1 punto) Estudie la continuidad de la función.

c) (1 punto) Estudie la derivabilidad de la función.

EJERCICIO 3.

Parte 1

A y B son dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que P(A) = 0.4, P(B) = 0.6.

a) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

b) (1 punto) Calcule P(A/B) y $P(B/A^C)$.

Parte II

(2 puntos) Tomando, al azar, una muestra de 80 empleados de una empresa, se encontró que 20 usaban gafas. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de empleados de esa empresa que usan gafas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.
(3 puntos) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}5 & -2 & -6\\ 0 & -3 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Determine X en la ecuación matricial $X\cdot A-2B=C$.

EJERCICIO 2.
Sea la función $f(x)\ =\frac{x-1}{2x-1}$.
a) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (0, 1).
b) (1 punto) Estudie la monotonía de f.
c) (1 punto) Halle las asíntotas, los puntos de corte con los ejes y represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3.
Parte 1
Se consideran dos sucesos A y B, asociados a un espacio muestral, tales que

$P(A\cup B)=1$, $P(A\cap B)=0.3$ y $P(A/B)=0.6$.

a) (1.5 puntos) Halle las probabilidades de los sucesos A y B.
b) (0.5 puntos) Determine si el suceso B es independiente del suceso A.

Parte II
El gasto que hacen las familias españolas en regalos de Navidad sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 84 euros. Para estimar esta media se seleccionó una muestra aleatoria y se obtuvo el intervalo de confianza (509.41, 539.79), con un nivel de confianza del 97%.
a) (0.5 puntos) ¿Cuál ha sido la media de la muestra escogida?
b) (1.5 puntos) ¿Qué tamaño tenía la muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.
a) (1.25 puntos) Plantee, sin resolver, el siguiente problema de programación lineal: "Una empresa fabrica camisas de dos tipos, A y B. El beneficio que obtiene es de 8 euros por cada camisa que fabrica del tipo A, y de 6 euros por cada una del tipo B. La empresa puede fabricar, como máximo, 100000 camisas, y las del tipo B han de suponer, al menos, el 60% del total. ¿Cuántas camisas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?"
b) (1.75 puntos) Represente la región definida por las inecuaciones:

$y\le x$, $y+2x\le 6$, $x\le 4y+3$.

Calcule el máximo de $F(x, y) = y + 2x$ en la región anterior e indique dónde se alcanza.

EJERCICIO 2.
Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida mediante $f(x)\ =\begin{cases} e^{-x} & si\ \ x\le 0\\ x^3-x+1 & si\ \ x>0\end{cases}$.
a) (1 punto) ¿Es f continua en x = 0? ¿Es continua en su dominio?
b) (1 punto) ¿Es f derivable en x = 0? ¿Es derivable en su dominio?
c) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

EJERCICIO 3.
Parte 1
El 70% de los visitantes de un museo son españoles. El 49% son españoles y mayores de edad. De los que no son españoles, el 40% son menores de edad.
a) (1 punto) Si se escoge, al azar, un visitante de este museo, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor de edad?
b) (1 punto) Se ha elegido, aleatoriamente, un visitante de este museo y resulta que es menor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que no sea español?
Parte II
Los jóvenes andaluces duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley Normal de media desconocida, μ, y desviación típica 2 horas. A partir de una muestra de 64 jóvenes se ha obtenido una media de 7 horas.
a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la media poblacional μ.
b) (1 punto) Manteniendo la misma confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la media de horas de sueño, cometiendo un error máximo de 0.25 horas?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (2 puntos) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$.

EJERCICIO 2.

Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo (kg) de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la función

$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

siendo B(x) el beneficio por kg y x el precio de cada kg, ambos expresados en euros.

a) (1.25 puntos) ¿Entre qué precios se producen beneficios para el almacenista?

b) (1.25 puntos) ¿Qué precio maximiza los beneficios?

c) (0.5 puntos) Si tiene en el almacén 10000 kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total máximo que podrá obtener?

EJERCICIO 3.

Parte I

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A^C) = 0.2, \quad P(B) = 0.25 \quad \text{y} \quad P(A \cup B) = 0.85.$$

a) (1.25 puntos) ¿Son los sucesos A y B independientes?

b) (0.75 puntos) Calcule $P(A^C/B^C)$.

Parte II

(2 puntos) Escriba todas las muestras de tamaño 2 que, mediante muestreo aleatorio simple (con reemplazamiento), se pueden extraer del conjunto {8, 10, 12} y determine el valor de la varianza de las medias de esas muestras.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(3 puntos) Un agricultor posee 10 hectáreas (ha) y decide dedicarlas al cultivo de cereales y hortalizas. Por las limitaciones de agua no puede destinar más de 5 ha a hortalizas. El cultivo de cereales tiene un coste de 1000 euros/ha. y el de hortalizas de 3000 euros/ha, no pudiendo superar el coste total la cantidad de 16000 euros. El beneficio neto por ha de cereales asciende a 2000 euros y el de hortalizas a 8000 euros. Halle la distribución de cultivos que maximiza el beneficio y calcule dicho máximo.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3^x & si \;\; x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & si \;\; x > 1 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 3.

EJERCICIO 3.

Parte I

Un polideportivo dispone de 100 bolas de pádel y 120 bolas de tenis. Se sabe que 65 bolas son nuevas. Además, 75 bolas de pádel son usadas. Por un error, todas las bolas se han mezclado.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola de tenis, ésta sea usada.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola, sea nueva.

Parte II

a) (1 punto) En una población, una variable aleatoria X sigue una distribución Normal de media 50 y desviación típica 9. Se elige, al azar, una muestra de tamaño 64 de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 48 y 52?

b) (1 punto) En una empresa de gas trabajan 150 personas en mantenimiento, 450 en operaciones, 200 en servicios y 100 en cargos directivos. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores de esa empresa por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿qué número de trabajadores se debe elegir de cada grupo?

CURSO 2008-2009 JUNIO

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.
Sea la igualdad A·X + B = A, donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.
a) (1 punto) Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.
b) (2 puntos) Obtenga X en la igualdad anterior, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2.
Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & si\ x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$
a) (2 puntos) Analice la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio.
b) (0.5 puntos) Determine la asíntota horizontal, si la tiene.
c) (0.5 puntos) Determine la asíntota vertical, si la tiene.

EJERCICIO 3.
Parte I
Un turista que realiza un crucero tiene un 50% de probabilidad de visitar Cádiz, un 40% de visitar Sevilla y un 30% de visitar ambas ciudades. Calcule la probabilidad de que:
a) (0.5 puntos) Visite al menos una de las dos ciudades.
b) (0.5 puntos) Visite únicamente una de las dos ciudades.
c) (0.5 puntos) Visite Cádiz, pero no visite Sevilla.
d) (0.5 puntos) Visite Sevilla, sabiendo que ha visitado Cádiz.
Parte II
El tiempo (en horas) que permanecen los coches en un determinado taller de reparación es una variable aleatoria con distribución Normal de desviación típica 4 horas.
a) (1 punto) Se eligieron, al azar, 16 coches del taller y se comprobó que, entre todos, estuvieron 136 horas en reparación. Determine un intervalo de confianza, al 98.5%, para la media del tiempo que permanecen los coches en ese taller.
b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra que permita estimar la media del tiempo que permanecen en reparación los coches en ese taller con un error en la estimación no superior a una hora y media y con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

CURSO 2008-2009 JUNIO

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.
a) (1.5 puntos) Dibuja el recinto definido por las siguientes restricciones:
$x + y \geq 2, \quad x - y \leq 0, \quad y \leq 4, \quad x \geq 0.$
b) (1 punto) Determine el máximo y el mínimo de la función *F(x, y) = x + y* en el recinto anterior y los puntos donde se alcanzan.
c) (0.5 puntos) ¿Pertenece el punto $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ al recinto anterior? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 2.
Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función:
$C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25, \quad 0 \leq t \leq 25$ (t = años transcurridos desde el año 2000)
a) (1 punto) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?
b) (1 punto) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?
c) (1 punto) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función C(t) en t = 8. Interprete el resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.

EJERCICIO 3.
Parte I
En un centro escolar, los alumnos de 2º de Bachillerato pueden cursar, como asignaturas optativas, Estadística o Diseño Asistido por Ordenador (DAO). El 70% de los alumnos estudia Estadística y el resto DAO. Además, el 60% de los alumnos que estudia Estadística son mujeres y, de los alumnos que estudian DAO son hombres el 70%.
a) (1 punto) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?
b) (1 punto) Sabiendo que se ha seleccionado una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Estadística?

Parte II
En un estudio de mercado del automóvil en una ciudad se ha tomado una muestra aleatoria de 300 turismos, y se ha encontrado que 75 de ellos tienen motor diésel. Para un nivel de confianza del 94%:
(1'5 puntos) Determine un intervalo de confianza de la proporción de turismos que tienen motor diésel en esa ciudad.
(0'5 puntos) ¿Cuál es el error máximo de la estimación de la proporción?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (2.5 puntos) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x + 3y \leq 12; \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} \geq 1; \quad y \geq 1; \quad x \geq 0.$$

b) (0.5 puntos) Calcule los valores extremos de la función $F(x, y) = 5x + 15y$ en dicha región y dónde se alcanzan.

EJERCICIO 2.

La función derivada de una función f viene dada por $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

a) (1.5 puntos) Obtenga los intervalos de monotonía de la función f y los valores de x en los que dicha función alcanza sus extremos locales.

b) (0.75 puntos) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de la función f.

c) (0.75 puntos) Sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 5), calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

EJERCICIO 3.

Parte I

Una enfermedad afecta al 10% de la población. Una prueba de diagnóstico tiene las siguientes características: si se aplica a una persona con la enfermedad, da positivo en el 98% de los casos; si se aplica a una persona que no tiene la enfermedad, da positivo en el 6% de los casos. Se elige una persona, al azar, y se le aplica la prueba.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que dé positivo?

b) (1 punto) Si no da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad?

Parte II

Se desea estimar la proporción de fumadores de una población mediante una muestra aleatoria.

a) (1 punto) Si la proporción de fumadores en la muestra es 0.2 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 95%, calcule el tamaño mínimo de la muestra.

b) (1 punto) Si en otra muestra de tamaño 280 el porcentaje de fumadores es del 25%, determine, para un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de fumadores de esa población.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule A^2 y $2B + I_2$.

b) (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - I_2 = 2B^2$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$.

a) (1.5 puntos) Determine el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función f tiene un máximo en x = 1 y que $f(1) = 2$.

b) (1.5 puntos) Para $a = b = 1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

EJERCICIO 3.

Parte 1

En una editorial hay dos máquinas A y B que encuadernan 100 y 900 libros al día, respectivamente. Además, se sabe que la probabilidad de que un libro encuadernado por A tenga algún fallo de encuadernación es del 2%, y del 10% si ha sido encuadernado por la máquina B. Se elige, al azar, un libro encuadernado por esa editorial.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) (1 punto) Si es defectuoso, halle la probabilidad de haber sido encuadernado por la máquina A.

Parte II

El tiempo que se tarda en la caja de un supermercado en cobrar a los clientes sigue una ley Normal con media desconocida y desviación típica 0.5 minutos. Para una muestra aleatoria de 25 clientes se obtuvo un tiempo medio de 5.2 minutos.

a) (1 punto) Calcule un intervalo de confianza, al nivel del 97%, para el tiempo medio que se tarda en cobrar a los clientes.

b) (1 punto) Indique el tamaño muestral mínimo necesario para estimar dicho tiempo medio con un error máximo de 0.5 y un nivel de confianza del 96%.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sea el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + y \leq 3; \qquad -x + y \leq 3; \qquad x \leq 2; \qquad y \geq 0$$

a) (1 punto) Represéntelo gráficamente.

b) (1 punto) Calcule los vértices de dicho recinto.

c) (0.5 puntos) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = -2x - y$? ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

EJERCICIO 2.

En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x) = 0.5x^2 - 4x + 6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo $[0, 10]$.

a) (1 punto) ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?

b) (1 punto) ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?

c) (0.5 puntos) ¿Cuál es el beneficio si no se invierte nada en publicidad? ¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?

EJERCICIO 3.

De dos sucesos aleatorios A y B del mismo espacio de sucesos se sabe que $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ y $P(A \cap B) = \frac{5}{8}$. Calcule:

a) (0.75 puntos) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

b) (0.75 puntos) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

c) (1 punto) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

EJERCICIO 4.

a) (1.25 puntos) En una población de 2000 hombres y 2500 mujeres se quiere seleccionar una muestra de 135 personas mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿cuál sería la composición de la muestra?

b) (1.25 puntos) Dada la población $\{6, 8, 11, a\}$, ¿cuánto debe valer a sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 10.3?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Sean A, B y C matrices con 2, 3 y 2 filas respectivamente. Sabiendo que el producto de matrices $A \cdot B \cdot C$ es posible y que el resultado es una matriz con 4 columnas, halle las dimensiones de dichas matrices.

b) (1.5 puntos) Halle la matriz X que verifica $I_2 - 2X = A \cdot (A - B^t)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & si \ x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & si \ x > 1 \end{cases}$.

a) (1.5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función.

b) (1 punto) Represéntela gráficamente.

EJERCICIO 3.

El 60% de los camareros de una localidad tienen 35 años o más, y de ellos el 70% son dueños del local donde trabajan. Por otra parte, de los camareros con menos de 35 años sólo el 40% son dueños del local donde trabajan.

a) (1.25 puntos) Seleccionado un camarero al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea dueño del local?

b) (1.25 puntos) Elegido al azar un camarero dueño de su local, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 35 años?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) Una máquina de envasado está diseñada para llenar bolsas con 300 g de almendras. Para comprobar si funciona correctamente, se toma una muestra de 100 bolsas y se observa que su peso medio es de 297 g. Suponiendo que la variable "peso" tiene una distribución Normal con varianza 16, y utilizando un contraste bilateral ¿es aceptable, a un nivel de significación de 0.05, que el funcionamiento de la máquina es correcto?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Halle los valores de a y b para que se verifique $A - B + A \cdot B^t = C$.

b) (0.75 puntos) ¿Existe algún valor de b para el que el producto $B \cdot B^t$ sea igual a la matriz nula?

c) (0.75 puntos) Para $a = 0.5$ y $b = 1$, halle la matriz X que verifica la igualdad $A \cdot X + B = O$ (O representa la matriz nula).

EJERCICIO 2.

Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ -x^3 - x^2 + 2 & si\ \ 0 < x \leq 1 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ -x^2 - x + 2 & si\ \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en x = 0.

b) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función h en x = 0.

c) (0.5 puntos) Si las dos funciones anteriores representan el perfil de un arco puntiagudo de una catedral y el de un arco redondeado (sin picos) de un túnel, indique, razonadamente, la que corresponde a la catedral y la que corresponde al túnel.

EJERCICIO 3.

Una empresa utiliza dos servidores para conectarse a Internet. El primero, S_1, lo utiliza el 45% de las veces y el segundo, S_2, el resto.

Cuando se conecta a Internet con S_1, los ordenadores se bloquean el 5% de las veces, y cuando lo hace con S_2 el 8%. Si un día, al azar, la empresa está conectada a Internet,

a) (1.25 puntos) ¿cuál es la probabilidad de que los ordenadores se queden bloqueados?

b) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa esté utilizando el servidor S_1, sabiendo que los ordenadores se han quedado bloqueados?

EJERCICIO 4.

De una muestra aleatoria de 350 individuos de una población, 50 son adultos.

a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 98%, para la proporción de adultos de esa población.

b) (1 punto) ¿Puede admitirse, a ese nivel de confianza, que la proporción de adultos de esa población es 2/15?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (2 puntos) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x \leq 2; \qquad y \geq -4x + 8; \qquad 3y - 4x - 16 \leq 0.$$

b) (0.5 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 3x - y$, y los puntos donde se alcanzan.

EJERCICIO 2.

El gerente de una empresa sabe que los beneficios de la misma, $f(x)$, dependen de la inversión, x , según la función $f(x) = -x^2 + 11x - 10$.

(x es la cantidad invertida, en millones de euros).

a) (0.75 puntos) Determine los valores de la inversión para los que la función beneficio es no negativa.

b) (1 punto) Halle el valor de la inversión para el cual el beneficio es máximo. ¿A cuánto asciende éste?

c) (0.75 puntos) ¿Entre qué valores ha de estar comprendida la inversión para que el beneficio sea creciente, sabiendo que éste es no negativo?

EJERCICIO 3.

En un centro de enseñanza secundaria se sabe que el 45% de los alumnos juegan al fútbol, que el 60% practican atletismo, y que de los que practican atletismo el 50% juegan al fútbol.

a) (0.75 puntos) ¿Qué porcentaje de alumnos practican ambos deportes?

b) (0.75 puntos) Si se elige al azar un alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que no practique ninguno de estos deportes?

c) (1 punto) Si un alumno de ese centro no juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que practique atletismo?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) Se sabe que los años de vida de los individuos de una población es una variable aleatoria Normal con desviación típica 8.9 años. Una muestra aleatoria de 100 individuos de esa población mostró una vida media de 71.8 años. Mediante un contraste de hipótesis unilateral, ¿puede afirmarse con los datos anteriores que la vida media es mayor de 70 años, a un nivel de significación $\alpha = 0.05$?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 euros para los del tipo A y de 40 euros para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste?

EJERCICIO 2.

Sea la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & si \quad x \le 0 \\ x^3 - 4x^2 & si \quad 0 < x \le 4 \\ 1 - \frac{4}{x} & si \quad x > 4 \end{cases}$

a) (1.75 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) (0.75 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

EJERCICIO 3.

El 41% de quienes se presentan a un examen son varones. Aprueban dicho examen el 70% de los varones presentados y el 60% de las mujeres presentadas.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que si una persona escogida al azar ha aprobado, sea mujer.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que si una persona escogida al azar ha suspendido, sea mujer.

c) (0.5 puntos) Ana dice que si alguien ha aprobado, es más probable que sea mujer que varón; Benito dice que si alguien ha suspendido es más probable que sea mujer que varón. ¿Quién tiene razón?

EJERCICIO 4.

Se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político mediante una muestra aleatoria.

a) (1.25 puntos) Si de una muestra de 500 personas 200 dicen que lo votan, calcule con un nivel de confianza del 97% un intervalo para la proporción de votantes a ese partido en la población.

b) (1.25 puntos) Si la proporción de votantes en otra muestra ha sido 0.2 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.05, con un nivel de confianza del 99%, calcule el tamaño mínimo de dicha muestra.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Se considera el recinto del plano determinado por los siguientes semiplanos:

$$4x - y \ge 4; \qquad 2x + y \le 15; \qquad 3y - x \le 10; \qquad y \ge 0.$$

a) (1.5 puntos) Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) (0.5 puntos) Calcule los puntos del recinto donde la función $F(x, y) = 4x - 7y$ alcanza el máximo y el mínimo.

c) (0.5 puntos) ¿Entre qué valores varía la función $F(x, y) = 4x - 7y$ en el recinto?

EJERCICIO 2.

Un depósito lleno de agua se vacía por un sumidero que tiene en la parte baja. El volumen de agua, en m^3, que hay en cada momento en el depósito, desde que empieza a vaciarse, viene dado por la función $V(t) = 8 - t + \frac{t^2}{32}$, donde t es el tiempo en minutos.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la capacidad del depósito?

b) (0.5 puntos) ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse?

c) (0.8 puntos) Represente gráficamente la función V.

d) (0.7 puntos) Calcule la derivada de esa función en $t = 8$ e interprete su significado.

EJERCICIO 3.

Una persona lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.

a) (0.5 puntos) Determine el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) (1.5 puntos) Sea A el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" y B el suceso "la primera puntuación es impar". Halle la probabilidad de A y la de B.

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes A y B?

EJERCICIO 4.

Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.2 segundos.

a) (1.25 puntos) Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral de 0.3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.

b) (1.25 puntos) A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0.05?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Un supermercado se abastece de gambas y langostinos a través de dos mayoristas, A y B, que le envían contenedores con cajas completas de ambos productos.
El mayorista A envía en cada contenedor 2 cajas de gambas y 3 de langostinos, al precio de 350 euros el contenedor, mientras que el mayorista B envía en cada uno 1 caja de gambas y 5 de langostinos, al precio de 550 euros el contenedor.
El supermercado necesita, como mínimo, 50 cajas de gambas y 180 de langostinos pudiendo almacenar, como máximo, 50 contenedores.
¿Cuántos contenedores debería pedir el supermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades con el menor coste posible? Indique cuál sería ese coste mínimo.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$

a) (1.25 puntos) Determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 3) y alcanza un extremo local en el punto de abscisa $x = -2$.

b) (1.25 puntos) Tomando $a = 8$ y $b = -10$ deduzca la curvatura de su gráfica, el valor mínimo que alcanza la función y los valores donde la función se anula.

EJERCICIO 3.

En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado equilibrado con las caras numeradas del 1 al 6 y observar el resultado se consideran los siguientes sucesos:
A: "obtener un número mayor que 4", B: "obtener un número par".

a) (1 punto) Escriba los elementos de cada uno de los siguientes sucesos:

A; B; $A^C \cup B$; $A \cap B^C$; $(A \cap B)^C$.

b) (1.5 puntos) Calcule las probabilidades $P(A^C \cap B^C)$ y $P(A^C \cup B^C)$.

EJERCICIO 4.

En los individuos de una población, la concentración de una proteína en sangre se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.42 g/dl. Se toma una muestra aleatoria de 49 individuos y se obtiene una media muestral de 6.85 g/dl.

a) (1.25 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 96%, para estimar la concentración media de la proteína en sangre de los individuos de esa población.

b) (1.25 puntos) ¿Es suficiente el tamaño de esa muestra para obtener un intervalo de confianza, al 98%, con un error menor que 0.125 g/dl?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones:

$x + 3y \geq 9$; $4x - 5y + 25 \geq 0$; $7x - 2y \leq 17$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

b) (1 punto) Calcule los vértices del mismo.

c) (0.5 puntos) Obtenga en dicho recinto los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 2x - y + 6$ y los puntos donde se alcanzan.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \left(\frac{2-5x}{3}\right)^2 + \frac{1-2x}{x^2}, \quad g(x) = (3x+2)^2 \cdot \ln(1+x^2)$$

b) (1 punto) Halle las asíntotas y los puntos de corte con los ejes de $h(x) = \frac{1+2x}{x-2}$

EJERCICIO 3.

Una fábrica posee un sistema de alarma contra robos. Por estudios previos a la instalación del sistema se sabe que la probabilidad de que un día se produzca un robo en la fábrica es 0.08.
Las indicaciones técnicas del fabricante de la alarma dicen que la probabilidad de que suene si se ha producido un robo es 0.98, y de que suene si no ha habido robo es 0.03.

a) (1.25 puntos) En un día cualquiera calcule la probabilidad de que no suene la alarma.

b) (1.25 puntos) Si suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no sea debido a un robo?

EJERCICIO 4.

El peso de los sacos de patatas de una cooperativa es una variable aleatoria Normal con desviación típica 0.25 kg. El agente de ventas de esa cooperativa afirma que el peso medio de los sacos no baja de 5 kg.
Se desea contrastar estadísticamente esta hipótesis. Para ello se toma una muestra aleatoria de 20 sacos y se obtiene que su peso medio es de 4.8 kg.

a) (0.5 puntos) Determine las hipótesis del contraste que se plantea en este enunciado.

b) (1 punto) Halle la región crítica de este contraste para $\alpha = 0.01$.

c) (1 punto) Con los datos de la muestra tomada, ¿puede decirse que existe evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis del agente de ventas de la cooperativa, al nivel de significación $\alpha = 0.01$?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes:

$$x + y \leq 15; \qquad x \leq 2y; \qquad 0 \leq y \leq 6; \qquad x \geq 0$$

a) (1 punto) Represente gráficamente dicho recinto.
b) (1 punto) Calcule sus vértices.
c) (0.5 puntos) Determine el máximo valor de la función $F(x, y) = 8x + 5y$ en el recinto anterior y dónde se alcanza.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Calcule:
a) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Las coordenadas de sus extremos relativos.
c) (0.5 puntos) El punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.

EJERCICIO 3.

Un alumno va a la Facultad en autobús el 80% de los días y el resto en su coche. Cuando va en autobús llega tarde el 20% de las veces y cuando va en coche llega a tiempo sólo el 10% de las veces. Elegido un día cualquiera al azar, determine:
a) (0.75 puntos) La probabilidad de que llegue a tiempo a clase y haya ido en autobús.
b) (0.75 puntos) La probabilidad de que llegue tarde a clase.
c) (1 punto) Si ha llegado a tiempo a clase, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido en autobús?

EJERCICIO 4.

Una empresa consultora quiere estudiar algunos aspectos de la vida laboral de los trabajadores de una ciudad. Para ello selecciona una muestra aleatoria de 500 trabajadores, de los que 118 afirman residir en otra ciudad. Con un nivel de confianza del 93%,
a) (1.75 puntos) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de trabajadores que residen fuera.
b) (0.75 puntos) Calcule el error cometido en el intervalo anterior.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) (1 punto) Calcule $A^t \cdot B - A \cdot B^t$.
b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $AX + BA = B$.

EJERCICIO 2.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:
a) (0.8 puntos) $f(x) = \frac{e^{3x}}{1+x^2}$.
b) (0.8 puntos) $g(x) = ln\{x(1 + 3x^2)\}$.
c) (0.9 puntos) $h(x) = 2^{5x} + \frac{1}{x^2}$.

EJERCICIO 3.

De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.
a) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?
b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?
c) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

EJERCICIO 4.

Un agricultor piensa que la producción media por naranjo, en su finca, es de 88 kg o más. Para confirmar su creencia selecciona, al azar, 10 de sus naranjos, pesa su producción y obtiene como resultado, en kg, para cada uno de ellos:

80, 83, 87, 95, 86, 92, 85, 83, 84, 95.

Se acepta que la producción de un naranjo sigue una distribución Normal con desviación típica 5 kg.
a) (1.5 puntos) Plantee el contraste de hipótesis unilateral que responda a las condiciones del problema y determine la región crítica para un nivel de significación $\alpha = 0.05$.
b) (1 punto) Con los datos de esta muestra, ¿qué conclusión debe obtener el agricultor sobre la producción media por naranjo de su finca, utilizando ese mismo nivel de significación?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.
Sea el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$3x + y \geq 4; \qquad x + y \leq 6; \qquad 0 \leq y \leq 5.$$

a) (1 punto) Represéntelo gráficamente.
b) (1 punto) Calcule los vértices de dicho recinto.
c) (0.5 puntos) En el recinto anterior, halle los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 5x + 3y$. ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

EJERCICIO 2.
Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes.
La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas, t, que lleva abierto el consultorio es $N(t) = 4t - t^2$.
a) (1 punto) ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?
b) (1 punto) Sabiendo que el consultorio cierra cuando no hay pacientes, ¿a qué hora cerrará?
c) (0.5 puntos) Represente gráficamente $N(t) = 4t - t^2$, con $N(t) \geq 0$.

EJERCICIO 3.
En una capital se editan dos periódicos, *CIUDAD* y *LA MAÑANA*. Se sabe que el 85% de la población lee alguno de ellos, que el 18% lee los dos y que el 70% lee *CIUDAD*.
Si elegimos al azar un habitante de esa capital, halle la probabilidad de que:
a) (0.75 puntos) No lea ninguno de los dos.
b) (0.75 puntos) Lea sólo *LA MAÑANA*.
c) (1 punto) Lea *CIUDAD*, sabiendo que no lee *LA MAÑANA*.

EJERCICIO 4.
(2.5 puntos) En una determinada especie animal el porcentaje de mortalidad debida a una enfermedad vírica es de al menos un 40%.
Se está realizando un estudio para probar la eficacia de un fármaco que permite tratar esa enfermedad y, consecuentemente, reducir el porcentaje de mortalidad en esa especie. Para ello, se suministró el fármaco a 50 sujetos enfermos, elegidos al azar, de los que murieron 14.
A la vista de estos datos, y tomando como nivel de significación 0.015, ¿se puede afirmar que existe evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis $H_0 : p \geq 0.4$, donde p es la proporción, y por lo tanto aceptar la eficacia del fármaco?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.
Sean las matrices: $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & b \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} c & d & 6 \\ 10 & 10 & 50 \end{pmatrix}$.
a) (1 punto) Calcule, si es posible, $P \cdot Q$ y $Q \cdot P$, razonando la respuesta.
b) (1.5 puntos) ¿Cuánto deben valer las constantes a, b, c y d para que $P \cdot 2Q = R$?

EJERCICIO 2.
Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax + 3 & si \;\; x \leq 1 \\ ax^2 - 6x + 5 & si \;\; x > 1 \end{cases}$
a) (0.5 puntos) Calcule el valor de a para que f sea continua en x = 1.
b) (2 puntos) Para a = 1, represente su gráfica y, a la vista de ella, indique su monotonía y las coordenadas de sus extremos locales.

EJERCICIO 3.
Un dado tiene seis caras, tres de ellas marcadas con un 1, dos marcadas con una X y la otra marcada con un 2. Se lanza tres veces ese dado.
a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres veces el 1?
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos X y un 2 en cualquier orden?
c) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres resultados diferentes?

EJERCICIO 4.
a) (1.25 puntos) La altura de los alumnos de una Universidad sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 11 cm. Calcule el tamaño mínimo que ha de tener una muestra aleatoria de esos alumnos para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 1cm, con un nivel de confianza del 98%.
b) (1.25 puntos) Dada la población {10, 12, 17}, escriba todas las muestras de tamaño 2 mediante muestreo aleatorio simple y calcule la media y la desviación típica de las medias muestrales.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.2 puntos) Represente gráficamente el recinto determinado por las siguientes inecuaciones $6x - y + 9 \geq 0$, $2x + 5y - 13 \leq 0$, $2x - 3y - 5 \leq 0$.

b) (0.9 puntos) Determine los vértices del recinto anterior.

c) (0.4 puntos) Halle los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 3x - 2y + 3$ en el recinto del primer apartado, y especifique en qué puntos los alcanza.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x+4 & si \quad x < 2 \\ \frac{4}{x} & si \quad 2 \leq x < 4 \\ x^2 - 4x + 1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) (0.5 puntos) Determine los extremos locales de f.

c) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 3.

EJERCICIO 3.

Un examen consta de una parte teórica y una parte práctica. La probabilidad de que se apruebe la parte teórica es 0.7 y la de que se apruebe la parte práctica 0.75. Se sabe que el 50% de los alumnos ha aprobado ambas.

a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de aprobar alguna de las dos partes.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de aprobar la parte práctica sabiendo que no se ha aprobado la parte teórica.

c) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos "aprobar parte teórica" y "aprobar parte práctica"?

EJERCICIO 4.

El director de una televisión afirma que un nuevo programa que va a emitirse será visto, al menos, por un 30% de personas. Una vez emitido se realizó una encuesta a 500 personas, elegidas al azar, y ésta reveló que 130 de ellas habían visto ese programa.

a) (0.5 puntos) Formule la hipótesis nula y la alternativa del contraste de hipótesis que permite determinar si los datos de la encuesta realizada son compatibles con la afirmación del director.

b) (1 punto) Halle la región crítica de ese contraste para un nivel de significación del 5.5%.

c) (1 punto) Según el dato obtenido en el apartado anterior ¿qué conclusión se obtiene sobre la afirmación realizada por el director de esa televisión?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $N^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, razone cuáles de las siguientes operaciones tienen sentido y efectúe las que puedan realizarse: $M + N^t$, $M^t \cdot N$, $M \cdot N$.

b) (1 punto) Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P: \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{r} natural \\ descafein. \end{array} & \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \qquad Q: \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{r} natural \\ descafein. \end{array} & \begin{pmatrix} 2.20 & 2.75 & 2.50 \\ 3.20 & 3.90 & 3.60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante.

EJERCICIO 2.

(2.5 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2^x + x^2}{x}; \quad g(x) = (x^2+1)^2 \cdot ln(e^{3x} + 4); \quad h(x) = \frac{1}{3x} - \frac{5}{x^2 - 2}$$

EJERCICIO 3.

Pedro vive en una ciudad donde el 40% de los días del año hay riesgo de lluvia y el resto no lo hay. Cuando hay riesgo de lluvia, Pedro coge el paraguas un 98% de las veces y cuando no lo hay, un 5% de las veces. Si se selecciona un día del año al azar,

a) (1.25 puntos) ¿cuál es la probabilidad de que Pedro no haya cogido el paraguas ese día?

b) (1.25 puntos) ¿cuál es la probabilidad de que exista riesgo de lluvia, si sabemos que ese día Pedro ha cogido el paraguas?

EJERCICIO 4.

El peso neto de las tabletas de chocolate de una determinada marca es una variable aleatoria Normal con media μ y desviación típica 7 gramos. Se sabe que 36 tabletas, elegidas al azar, han dado un peso total de 5274 gramos.

a) (1.25 puntos) Calcule un intervalo con un nivel de confianza del 94% para la media μ.

b) (1.25 puntos) Con el mismo nivel de confianza, ¿cuántas tabletas, como mínimo, habrá que tomar como muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, de 3 gramos?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) De una matriz cuadrada, A, de orden 3 se conocen los siguientes elementos $a_{12} = a_{21} = -2$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 1$.

Determine los demás elementos de la matriz A sabiendo que debe cumplirse la ecuación $A \cdot B = C^t$, donde $B^t = (1 \quad -1 \quad 1)$ y $C = (-4 \quad 2 \quad -1)$.

b) (1 punto) Calcule $2D^2$, siendo $D = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2.

El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función *B(t)* expresada a continuación:

$$B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 & si \ \ 0 \le t \le 6 \\ \frac{t+1}{2} & si \ \ 6 < t \le 12 \end{cases}$$, t es el tiempo transcurrido en meses.

a) (1 punto) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.

b) (0.5 puntos) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio?

c) (1 punto) Represente gráficamente la función *B(t)*. ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió?

EJERCICIO 3.

En una ciudad, el 55% de la población consume aceite de oliva, el 30% de girasol, y el 20% ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:

a) (1 punto) Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol?

b) (1 punto) Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva?

c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite?

EJERCICIO 4.

El peso de los adultos de una determinada población sigue una distribución Normal de media 70 kg y desviación típica 16 kg. Si elegimos, al azar, muestras de tamaño 4,

a) (0.5 puntos) ¿cuál es la distribución de la media muestral?

b) (1 punto) ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de una de esas muestras esté comprendido entre 65 y 72 kg?

c) (1 punto) ¿cuál es la probabilidad de que ese peso medio sea menor que 70kg?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

$13x + 8y \le 600$; $3(x - 2) \ge 2(y - 3)$; $x - 4y \le 0$.

a) (1.75 puntos) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

b) (0.75 puntos) Calcule el valor máximo en dicho recinto de la función F(x, y) = 65x + 40y, indicando dónde se alcanza.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) La gráfica de la función derivada, *f* ', de una función *f* es una parábola que corta al eje OX en los puntos (−1, 0) y (3, 0), y tiene su vértice en (1, −4).

Estudie, a partir de ella, la monotonía de la función f e indique la abscisa de cada extremo relativo.

b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = -2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3.

El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión y de los que sí lo están, solamente un 5% fueron reparados anteriormente. Se elige un aparato al azar en el servicio técnico:

a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido reparado en otra ocasión?

b) (1.25 puntos) Si es la primera vez que ha llegado al servicio técnico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en garantía?

EJERCICIO 4.

Con el fin de estudiar el peso medio de los perros recién nacidos de una determinada raza, se tomó una muestra en una clínica veterinaria y se obtuvieron los siguientes pesos, medidos en kg: 1.2 0.9 1 1.2 1.1 1 0.8 1.1

Se sabe que el peso de los cachorros de esta raza se distribuye según una ley Normal con desviación típica 0.25 kg.

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, al 95%.

b) (0.5 puntos) Halle el error máximo que se cometería usando el intervalo anterior.

c) (0.5 puntos) Razone cómo variaría la amplitud del intervalo de confianza si, manteniendo el mismo nivel de confianza, aumentásemos el tamaño de la muestra.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(I_3 - A)^3$.

b) (1.25 puntos) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, determine a y b de manera que $B \cdot C - D = O$, siendo O la matriz nula.

EJERCICIO 2.

Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, viene dada en función de la cantidad, x, que se invierte, también en miles de euros, por la siguiente expresión:

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.4x + 3.5, \qquad \text{con } x \geq 10.$$

a) (0.5 puntos) Calcule la rentabilidad para una inversión de 100000 euros.
b) (1.5 puntos) Deduzca y razone qué cantidad habría que invertir para obtener la máxima rentabilidad.
c) (0.5 puntos) ¿Qué rentabilidad máxima se obtendría?

EJERCICIO 3.

Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda.
a) (1 punto) Construya el espacio muestral de este experimento aleatorio.
b) (1 punto) Determine la probabilidad del suceso A: "El jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda".
c) (0.5 puntos) Si sabemos que en la moneda ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado haya salido más de 3 puntos?

EJERCICIO 4.

En un distrito universitario, la calificación de los alumnos sigue una distribución Normal de media 6.2 puntos y desviación típica de 1 punto. Se seleccionó, aleatoriamente, una muestra de tamaño 25.
a) (1 punto) Indique la distribución de la media de las muestras de tamaño 25.
b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de las calificaciones de los alumnos de una de esas muestras esté comprendida entre 6 y 6.6 puntos?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Dibuje el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices:

$$y \geq 200 - 2x, \qquad x - 100 \leq 3y, \qquad x + 2y \leq 600, \qquad x \geq 0.$$

b) (1 punto) Sabiendo que A(0, 2), B(1, 4), C(3, 4), D(4, 2) y E(2, 1) son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x, y) = 10x + 5y + 21$, e indique los puntos donde se alcanzan.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & si \quad x \leq 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & si \quad 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & si \quad x > 3 \end{cases}$

a) (0.75 puntos) Calcule el valor de a para que f sea continua en x = 1.
b) (1.75 puntos) Para a =2 estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

EJERCICIO 3.

Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.
a) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que gane Ana.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que gane Manolo.
c) (0.25 puntos) Calcule la probabilidad de que haya empate.

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) Un estudio sociológico afirma que el 70% de las familias cena viendo la televisión. Se desea contrastar la veracidad de esta afirmación y, para ello, se toma una muestra de 500 familias, en la que se observa que 340 ven la televisión mientras cenan. Decida, mediante un contraste de hipótesis, si la afirmación es cierta con un nivel de significación de 0.01.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $2 \cdot X - C \cdot D = (I_3 + D) \cdot C$.

b) (1 punto) Si las matrices C y D son las matrices de adyacencia de dos grafos, de vértices a, b, c y 1, 2, 3, respectivamente, haga la representación gráfica de dichos grafos.

EJERCICIO 2.

Tras un test realizado a un nuevo modelo de automóvil, se ha observado que el consumo de gasolina, c(x) , expresado en litros, viene dado por la función

$$c(x) = 7.5 - 0.05x + 0.00025x^2,$$

siendo x la velocidad en km/h y $25 \le x \le 175$.

a) (0.5 puntos) Determine el consumo de gasolina a las velocidades de 50 km/h y 150 km/h.

b) (1 punto) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función c(x).

c) (1 punto) ¿A qué velocidades de ese intervalo se obtiene el mínimo consumo y el máximo consumo y cuáles son éstos?

EJERCICIO 3.

Sean dos sucesos, A y B, tales que P(A) = 0.5, P(B) = 0.4 y P(A/B) = 0.5.

a) (1 punto) Halle la probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.

c) (0.75 puntos) ¿Son independientes los sucesos A y B? Razone la respuesta.

EJERCICIO 4.

El director de un banco afirma que la cantidad media de dinero extraído, por cliente, de un cajero automático de su sucursal no supera los 120 euros. Para contrastar esta hipótesis elige al azar 100 extracciones de este cajero y obtiene una media muestral de 130 euros. Se sabe que la cantidad de dinero extraído por un cliente en un cajero automático se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 67 euros.

a) (0.5 puntos) Plantee el contraste de hipótesis asociado al enunciado.

b) (1 punto) Determine la región de aceptación, para un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

c) (1 punto) Con los datos muestrales tomados, ¿existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis de este director, con el mismo nivel de significación anterior?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Una empresa elabora dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de B necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda máquina. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda.

Si la empresa obtiene un beneficio de 70 euros por cada unidad de A, y de 50 euros por cada unidad de B, ¿qué cantidad semanal de cada producto debe producir con objeto de maximizar el beneficio total? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2.

Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x+2} & si \ x \le 0 \\ \frac{2}{x-2} & si \ x > 0 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) (1 punto) Halle las ecuaciones de las asíntotas de esta función.

EJERCICIO 3.

Una compañía aseguradora realiza operaciones de seguros médicos y de seguros de vida. El 20% de las operaciones corresponde a seguros médicos y el resto a seguros de vida. El porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos es del 10% en los seguros médicos y del 15% en seguros de vida.

a) (1.5 puntos) Halle el porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos.

b) (1 punto) De las operaciones que han sufrido retrasos en los pagos, ¿qué porcentaje corresponde a los seguros de vida?

EJERCICIO 4.

Se sabe que la estatura de las personas de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal cuya desviación típica es de 0.04 m. Para estimar la media de esta variable se ha tomado una muestra aleatoria de 60 personas de esa población y se ha encontrado una estatura media de 1.73 m.

a) (1.25 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, con un nivel del 97%, para la media de la distribución de estaturas.

b) (1.25 puntos) Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esta población, para que la amplitud de un intervalo de la media con este nivel de confianza sea inferior a 0.08 m.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Calcule $A^2 - B \cdot C^t$.

b) [1.5 puntos] Resuelva la ecuación matricial $A{\cdot}X + B = 2{\cdot}C$.

EJERCICIO 2.

a) (1 punto) Calcule la función derivada de $f(x) = \frac{e^{-2x}}{(-x^2+2)^2}$.

b) (1.5 puntos) Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes N(t) que acude un día a una cadena de almacenes, en función del número de horas t que llevan abiertos, es $N(t) = a{\cdot}t^2 + b{\cdot}t$, $0 \le t \le 8$, $a, b \in R$.

Sabiendo que el máximo de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b.

EJERCICIO 3.

En una primera bolsa se han colocado 4 bolas blancas y 3 negras, y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y, sin verla, se introduce en la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda. Halle la probabilidad de que:

a) (1.25 puntos) La bola extraída de la segunda bolsa sea negra.

b) (1.25 puntos) La bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca.

EJERCICIO 4.

Una máquina está preparada para fabricar piezas de, a lo sumo, 10 cm de longitud.

Se toma una muestra de 1000 piezas, comprobándose que la media sus longitudes es de 10.0037 cm. La longitud de las piezas fabricadas por esa máquina sigue una ley Normal con desviación típica 0.2 cm.

a) (0.5 puntos) Plantee un contraste de hipótesis unilateral para comprobar si con los datos de esa muestra es posible afirmar que la media de la longitud de las piezas fabricadas por la máquina es de más de 10 cm.

b) (1 punto) Determine la región de aceptación de la hipótesis nula de ese contraste para un nivel de significación $\alpha = 0.025$.

c) (1 punto) Con los datos de la muestra y usando el contraste de hipótesis del primer apartado, ¿qué conclusión se obtendría sobre la longitud media de las piezas fabricadas?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \le 20, \quad 3x + 5y \le 70, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

a) (0.5 puntos) Razone si el punto de coordenadas (4.1, 11.7) pertenece al recinto.

b) (1.25 puntos) Represente dicho recinto y calcule sus vértices.

c) (0.75 puntos) ¿Dónde alcanzará la función $F(x, y) = 0.6x + y$ sus valores extremos y cuáles serán éstos?

EJERCICIO 2.

Las funciones $I(t) = -2t^2 + 51t$ y $G(t) = t^2 - 3t + 96$ con $0 \le t \le 18$ representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, t, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.

a) (0.5 puntos) ¿Para qué valores de t, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?

b) (1 punto) Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de t y represéntela gráficamente.

c) (1 punto) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueron máximos? Calcule el valor de ese beneficio.

EJERCICIO 3.

Un libro tiene cuatro capítulos. El primer capítulo tiene 140 páginas, el segundo 100, el tercero 150 y el cuarto 50. El 5% de las páginas del primer capítulo, el 4% del segundo y el 2% del tercero tienen algún error. Las páginas del cuarto capítulo no tienen errores.

a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una página al azar, tenga algún error?

b) (1.25 puntos) Supongamos que elegimos una página al azar y observamos que no tiene ningún error, ¿cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

EJERCICIO 4.

a) (1 punto) Una población de tamaño 1000 se ha dividido en 4 estratos de tamaño 150, 400, 250 y 200. Utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 10 individuos del tercer estrato, ¿cuál es el tamaño de la muestra?

b) (1.5 puntos) El peso de los individuos de una población se distribuye según una ley Normal de desviación típica 6 kg. Calcule el tamaño mínimo de la muestra para estimar, con un nivel de confianza del 95%, el peso medio en la población con un error no superior a 1 kg.

CURSO 2010-2011 SEPTIEMBRE

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Se considera el recinto R del plano, determinado por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \geq 2, \qquad x + 3y \leq 15, \qquad 3x - y \leq 15, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

a) (1.5 puntos) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

b) (0.5 puntos) Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x, y) = 3x + y$ en dicho recinto.

c) (0.5 puntos) Razone si existen puntos (x, y) del recinto, para los que $F(x, y) = 30$.

EJERCICIO 2.

a) (1.25 puntos) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{4x}{2x+1}$$

b) (1.25 puntos) Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$.

EJERCICIO 3.

En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0.95. La probabilidad de que suene la alarma sin que haya incidente es de 0.03.

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que suene la alarma?

b) (1 punto) Si ha sonado la alarma, calcule la probabilidad de que no haya habido incidente.

EJERCICIO 4.

Suponiendo que la variable "años de vida de los individuos de un país" sigue una distribución Normal con desviación típica 8.9 años, se desea contrastar la hipótesis de que la vida media de los mismos no supera los 70 años.

A partir de una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido que su vida media ha sido 71.8 años.

a) (0.5 puntos) Formule el contraste de hipótesis que indica el enunciado.

b) (1 punto) Determine la región crítica a un nivel de significación del 5%.

c) (1 punto) Con los datos muestrales, ¿existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis a ese nivel de significación?

CURSO 2010-2011 SEPTIEMBRE

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) (1.25 puntos) Efectúe, si es posible, los siguientes productos:

$$A \cdot A^t; \qquad A^t \cdot A; \qquad A \cdot B$$

b) (1.25 puntos) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A \cdot A^t \cdot X = B$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & si \ \ x \leq 2 \\ 4 - \frac{a}{x} & si \ \ x > 2 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a.

b) (1 punto) Para $a = 1$, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.

EJERCICIO 3.

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = 0.4, \qquad P(B) = 0.5 \qquad y \qquad P(A \cap B) = 0.2.$$

a) (1.5 puntos) Calcule las siguientes probabilidades: $P(A \cup B)$, $P(A/B)$ y $P(B/A^C)$.

b) (0.5 puntos) Razone si A y B son sucesos incompatibles.

c) (0.5 puntos) Razone si A y B son independientes.

EJERCICIO 4.

Sea X una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4. Se toman muestras de tamaño 16.

a) (1 punto) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 47.5 y 52.5?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $y\ C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Halle los valores de a y b para que se verifique $B{\cdot}C^t = A$.

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A{\cdot}X - A^2 = I_2$.

EJERCICIO 2.

De la función f se sabe que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$.

a) (1.5 puntos) Estudie la monotonía y la curvatura de f.

b) (1 punto) Sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (1, 1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

EJERCICIO 3.

En un congreso de 200 jóvenes profesionales se pasa una encuesta para conocer los hábitos en cuanto a contratar los viajes por internet. Se observa que 120 son hombres y que, de estos, 84 contratan los viajes por internet, mientras que 24 de las mujeres no emplean esa vía.

Elegido un congresista al azar, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) No contrate sus viajes por internet.

b) (0.75 puntos) Use internet para contratar los viajes, si la persona elegida es una mujer.

c) (0.75 puntos) Sea hombre, sabiendo que contrata sus viajes por internet.

EJERCICIO 4.

La variable "tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto" sigue una distribución Normal con desviación típica 0.05 segundos. Al medir dicho tiempo en 50 conductores se ha obtenido un tiempo medio de 0.85 segundos.

a) (1.25 puntos) Halle el intervalo de confianza para el tiempo medio de reacción, con un nivel de confianza del 99%.

b) (1.25 puntos) ¿De qué tamaño mínimo ha de tomarse una muestra para que el error de estimación no supere 0.01 segundos, con un nivel de confianza del 95%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$3x + 4y \geq 28$; $5x + 2y \leq 42$; $x - y \geq 0$.

a) (0.5 puntos) Razone si el punto de coordenadas (7, 3) pertenece al recinto.

b) (1.5 puntos) Represente dicho recinto y halle sus vértices.

c) (0.5 puntos) Calcule el valor máximo de la función $F(x, y) = 3x - 2y + 6$ en el recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

EJERCICIO 2.

a) (1.25 puntos) Dada la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$, determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 3) y alcanza un extremo en $x = -2$.

b) (1.25 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$, en el punto de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 3.

Lanzamos un dado, si sale 5 o 6 extraemos una bola de una urna A, que contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Si sale otro resultado se extrae una bola de la urna B, que contiene 3 bolas blancas y 7 negras. Calcule:

a) (1 punto) La probabilidad de que la bola extraída sea negra.

b) (0.5 puntos) La probabilidad de que la bola sea negra y de la urna B.

c) (1 punto) La probabilidad de que haya salido menos de 5 si la bola extraída ha sido blanca.

EJERCICIO 4.

Un informe de un Ayuntamiento afirma que al menos el 26% de los usuarios del carril bici habrían utilizado el coche particular para sus desplazamientos de no haber existido dicho carril. Sin embargo, un periódico local anuncia la falsedad del dato, informando que una encuesta propia indica que solo 240 de los 1000 usuarios encuestados afirman que habrían utilizado el coche particular.

a) (1.5 puntos) Establezca un contraste, con hipótesis nula H_0: $p \geq 0.26$, para verificar la afirmación del Ayuntamiento e indique la región crítica de dicho contraste para un nivel de significación del 5%.

b) (1 punto) Con este nivel de significación ¿podría aceptarse el informe del Ayuntamiento?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Halle la matriz X que verifique la ecuación matricial $A^2 \cdot X = A - B \cdot C$, siendo A, B y C las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2.

Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$.

a) (0.8 puntos) Determine la monotonía y curvatura de la función.
b) (0.8 puntos) Calcule sus asíntotas.
c) (0.9 puntos) Represéntela gráficamente.

EJERCICIO 3.

Se ha impartido un curso de "conducción eficiente" a 200 personas. De los asistentes al curso, 60 son profesores de autoescuela y, de ellos, el 95% han mejorado su conducción. Este porcentaje baja al 80% en el resto de los asistentes. Halle la probabilidad de que, elegido un asistente al azar:

a) (1.25 puntos) No haya mejorado su conducción.
b) (1.25 puntos) No sea profesor de autoescuela, sabiendo que ha mejorado su conducción.

EJERCICIO 4.

Se acepta que los rendimientos anuales, medidos en porcentajes, que producen los depósitos bancarios a plazo, se distribuyen según una ley Normal con desviación típica 1.8 y se pretende realizar una estimación del rendimiento medio de los mismos. Para ello, se tiene una muestra de 36 entidades bancarias en las que se observa que el rendimiento medio de los depósitos es del 2.5.

a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 96%, para el rendimiento medio de los depósitos a plazo. ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación?
b) (1 punto) Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar el rendimiento medio de los depósitos con un error máximo de 0.5?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1.9 puntos) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones

$7x - y \geq -10; \quad x + y \leq 2; \quad 3x - 5y \leq 14$

y determine sus vértices.
b) (0.6 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x, y) = 2x + 3y$ en dicha región.

EJERCICIO 2.

Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo t, medido en meses:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & si\ 0 \leq t \leq 5 \\ \dfrac{100t - 250}{t + 5} & si\ \ t > 5 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad de la función P.
b) (0.75 puntos) Estudie la derivabilidad de P en $t = 5$.
c) (0.75 puntos) Estudie la monotonía de dicha función e interprete la evolución del porcentaje de células afectadas.
d) (0.5 puntos) ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?

EJERCICIO 3.

Se sabe que el 44% de la población activa de cierta provincia está formada por mujeres.

También se sabe que, de ellas, el 25% está en paro y que el 20% de los hombres de la población activa también están en paro.

a) (1.25 puntos) Elegida, al azar, una persona de la población activa de esa provincia, calcule la probabilidad de que esté en paro.
b) (1.25 puntos) Si hemos elegido, al azar, una persona que trabaja, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

EJERCICIO 4.

a) (1 punto) En una ciudad viven 400 hombres y 320 mujeres y se quiere seleccionar una muestra de tamaño 54 utilizando muestreo estratificado por sexos, con afijación proporcional, ¿cuál sería la composición de la muestra?
b) (1.5 puntos) A partir de una población de elementos 1, 2, 3, 4 se seleccionan, mediante muestreo aleatorio simple, todas las muestras de tamaño 2.

Escriba dichas muestras y calcule la varianza de las medias muestrales.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Un comerciante dispone de 1200 euros para comprar dos tipos de manzanas A y B. Las del tipo A las compra a 0.60 euros/kg y las vende a 0.90 euros/kg, mientras que las del tipo B las compra a 1 euro/kg y las vende a 1.35 euros/kg.
Sabiendo que su vehículo a lo sumo puede transportar 1500 kg de manzanas, ¿cuántos kilogramos de cada tipo deberá adquirir para que el beneficio que obtenga sea máximo? ¿Cuál sería ese beneficio?

EJERCICIO 2.

a) (0.75 puntos) Para la función f definida de la forma $f(x)=\frac{ax}{x+b}$, determine, razonadamente, los valores de a y b sabiendo que tiene como asíntota vertical la recta de ecuación $x=-2$ y como asíntota horizontal la de ecuación $y=3$.
b) (1.75 puntos) Para la función g, definida de la forma $g(x)=x^3-3x^2+2$, determine: su dominio, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Con esos datos haga un esbozo de su gráfica.

EJERCICIO 3.

Una empresa dispone de tres máquinas A, B y C, que fabrican, respectivamente, el 60%, 30% y 10% de los artículos que comercializa.
El 5% de los artículos que fabrica A, el 4% de los de B y el 3% de los de C son defectuosos. Elegido, al azar, un artículo de los que se fabrican en la empresa:
a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y esté fabricado por la máquina C?
b) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?
c) (0.75 puntos) Si sabemos que no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A?

EJERCICIO 4.

Una característica de una determinada población se distribuye según una variable aleatoria Normal X de media desconocida y desviación típica 0.9. Extraída al azar una muestra de tamaño 9 de esa población y observada X, dio como resultados:

10.5 10 8.5 10.5 11.5 13.5 9.5 13 12

a) (1.25 puntos) Halle un intervalo de confianza, al 99%, para la media de la variable X.
b) (1.25 puntos) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa población, para que el error máximo que se cometa en la determinación de un intervalo de confianza para la media de X sea, a lo sumo, 0.3, con un nivel de confianza del 90%.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.
a) (0.5 puntos) Presente en una matriz M, de dimensión 3x2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.
b) (0.5 puntos) Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, A (20 grandes y 30 pequeños) y B (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.
c) (1.5 puntos) Calcule los productos $M\cdot A$ y $M\cdot B$ e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & si\ x\le 2 \\ \frac{x}{2}-b & si\ x>2 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Calcule a y b para que la función sea continua en todo su dominio y presente un mínimo en x = 1.
b) (1 punto) Represente gráficamente la función para $a=1.5$ y $b=0.5$.

EJERCICIO 3.

Se sabe que el 90% de los estudiantes del último curso de una Universidad está preocupado por sus posibilidades de encontrar trabajo, el 30% está preocupado por sus notas y el 25% por ambas cosas.
a) (1.5 puntos) Si hay 400 alumnos matriculados en el último curso de dicha Universidad, ¿cuántos de ellos no están preocupados por ninguna de las dos cosas?
b) (1 punto) Si un alumno del último curso, elegido al azar, no está preocupado por encontrar trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté preocupado por sus notas?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) Se cree que al menos el 25% de los usuarios de teléfonos móviles son de contrato. De una encuesta realizada a 950 personas, elegida al azar, 200 de ellas manifestaron que tenían teléfono móvil de contrato. A la vista de estos resultados y con un nivel de significación del 5%, ¿puede admitirse que la proporción de personas con contrato en su teléfono móvil ha disminuido? Utilice para la resolución del problema un contraste de hipótesis con hipótesis nula "la proporción p es mayor o igual que 0.25".

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz F se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz G se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array} \qquad G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array}$$

a) (1 punto) Efectúe los productos $F^t \cdot G$ y $F \cdot G^t$.

b) (0.75 puntos) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias.

c) (0.75 puntos) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

EJERCICIO 2.

Sean dos funciones, f y g, tales que las expresiones de sus funciones derivadas son, respectivamente, $f'(x) = x + 2$ y $g'(x) = 2$.

a) (1 punto) Estudie la monotonía de las funciones f y g.

b) (0.75 puntos) De las dos funciones f y g, indique, razonadamente, cuál de ellas tiene algún punto en el que su derivada es nula.

c) (0.75 pntos) ¿Cuál de las funciones f y g es una función polinómica de 1er grado? ¿Por qué?

EJERCICIO 3.

Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar.

a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que sea blanca.

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca sabiendo que está marcada?

c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada?

d) (0.75 puntos) ¿Son independientes los sucesos "sacar bola marcada" y "sacar bola blanca"?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) Un índice para calibrar la madurez lectora de los alumnos de primaria se distribuye según una ley Normal con desviación típica 2. Elegida una muestra de 18 alumnos en un centro de primaria, se obtiene una media muestral de 10.8 en dicho índice. Mediante el uso de un contraste de hipótesis, ¿se puede aceptar, con un nivel de significación del 1%, la hipótesis nula de que la media del índice de madurez lectora de los alumnos de este centro no es inferior a 11?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) En una carpintería se construyen dos tipos de estanterías: grandes y pequeñas, y se tienen para ello 60m^2 de tableros de madera. Las grandes necesitan 4m^2 de tablero y las pequeñas 3m^2. El carpintero debe hacer como mínimo 3 estanterías grandes, y el número de pequeñas que haga debe ser, al menos, el doble del número de las grandes. Si la ganancia por cada estantería grande es de 60 euros y por cada una de las pequeñas es de 40 euros, ¿cuántas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

EJERCICIO 2.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) (0.8 puntos) $f(x) = e^{3x} \cdot \ln(2x-5)$.

b) (0.8 puntos) $g(x) = \frac{3^{2x}}{x^2-1}$.

c) (0.9 puntos) $h(x) = (3x^2+5x-1)^6 + x^2 - \ln x$.

EJERCICIO 3.

Se consideran dos sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cup B) = 0.94$.

a) (1 punto) ¿Son A y B sucesos independientes?

b) (1 punto) Calcule $P(A/B)$.

c) (0.5 puntos) Calcule $P(A^C \cup B^C)$.

EJERCICIO 4.

La velocidad a la que circulan los conductores por una autopista sigue una distribución $N(\mu, 20)$. En un control efectuado a 100 conductores elegidos al azar ha resultado una velocidad media de 110 km/h.

a) (2 puntos) Determine el intervalo de confianza para μ, con un nivel del 99%.

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es el máximo error cometido en esta estimación?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sea el recinto limitado por las siguientes inecuaciones

$y + 2x \geq 2$; $2y - 3x \geq -3$; $3y - x \leq 6$

a) (1 punto) Represente gráficamente dicho recinto.

b) (1 punto) Calcule sus vértices.

c) (0.5 puntos) Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x - y$ en el recinto anterior, así como dónde lo alcanza.

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si \quad x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$

Determine los valores de a y b, para que la función f sea derivable en $x = 2$.

b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3.

Una compañía de seguros ha hecho un seguimiento durante un año a 50000 coches de la marca A, a 20000 de la marca B y a 30000 de la C, que tenía asegurados, obteniendo que, de ellos, habían tenido accidente 650 coches de la marca A, 200 de la B y 150 de la C. A la vista de estos datos:

a) (1,25 puntos) ¿Cuál de las tres marcas de coches tiene menos proporción de accidentes?

b) (1,25 puntos) Si, elegido al azar uno de los coches observados, ha tenido un accidente, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

EJERCICIO 4.

De una nuestra aleatoria de 120 alumnos presentados a las Pruebas de Acceso, sólo 15 han resultado no aptos.

a) (1,5 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 99% para estimar la proporción de alumnos que han resultado aptos en dicha prueba.

b) (1 punto) Manteniendo la misma confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción de alumnos aptos, cometiendo un error inferior al 5%.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + A^t = I_2$.

b) (0,5 puntos) ¿Qué requisitos mínimos debe cumplir una matriz B para que pueda efectuarse el producto A·B?

c) (0,5 puntos) ¿Y para el producto 3·B·A?

EJERCICIO 2.

Se estima que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & si \quad 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \leq 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) (0,75 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que B sea una función continua.

b) (1 punto) Para $a = 8$ represente su gráfica e indique en qué períodos de tiempo la función crecerá o decrecerá.

c) (0,75 puntos) Para $a = 8$ indique en qué momento se obtiene el máximo beneficio en los primeros 6 años y a cuánto asciende su valor.

EJERCICIO 3.

En una localidad hay solamente dos supermercados A y B. El 58% de los habitantes compra en el A, el 35% en el B y el 12% compra en ambos.

Si se elige un ciudadano al azar, calcule la probabilidad de que:

a) (0.75 puntos) Compre en algún supermercado.

b) (0.5 puntos) No compre en ningún supermercado.

c) (0.5 puntos) Compre solamente en un supermercado.

d) (0.75 puntos) Compre en el supermercado A, sabiendo que no compra en B.

EJERCICIO 4.

Se considera que, a lo sumo, el 5% de los artículos guardados en un almacén son defectuosos. Pasado un tiempo, la persona encargada del mantenimiento del almacén decide investigar si esa estimación es adecuada. Para ello, escoge aleatoriamente 300 artículos de los que 35 están defectuosos.

a) (1.5 puntos) Plantee un contraste de hipótesis (H_0: p < 0.05) para determinar si ha aumentado la proporción de artículos defectuosos. Obtenga la región crítica del contraste para un nivel de significación del 5%.

b) (1 punto) ¿Qué conclusión se obtiene con los datos muestrales observados?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30 euros y el de un pantalón es de 50 euros.

Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo.

EJERCICIO 2.

(2.5 puntos) Determine los valores que han de tomar a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 7 & si\ x < 1 \\ 4x - b & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

sea derivable en $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.

Un pescador tiene tres tipos de carnada de las que sólo una es adecuada para pescar salmón. Si utiliza la carnada correcta la probabilidad de que pesque un salmón es 1/3, mientras que si usa una de las inadecuadas esa probabilidad se reduce a 1/5.

a) (1.25 puntos) Si elige aleatoriamente la carnada, ¿cuál es la probabilidad de que pesque un salmón?

b) (1.25 puntos) Si ha pescado un salmón, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho con la carnada adecuada?

EJERCICIO 4.

En una caja de ahorros se sabe que el porcentaje de los nuevos clientes que contratan un plan de pensiones no supera el 23%. El director de una de las sucursales decide hacer un regalo a cualquier nuevo cliente que contrate uno de esos planes y, tras un mes, comprueba que 110 de los 470 nuevos clientes han contratado un plan de pensiones.

a) (1.5 puntos) Plantee un contraste de hipótesis, con $H_0 : p \leq 0.23$, para decidir si, con los datos dados, se puede afirmar que la medida del director ha aumentado la contratación de estos planes de pensiones. Halle la región de aceptación de este contraste de hipótesis para un nivel de significación del 5%.

b) (1 punto) Según el resultado del apartado anterior, ¿qué conclusión podemos obtener sobre la medida tomada por el director de esta sucursal?

CURSO 2011-2012 SEPTIEMBRE

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B.

En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.

a) (0.75 puntos) Para cada mes construya la matriz de dimensión 3x2 correspondiente a las compras de ese mes.

b) (0.5 puntos) Calcule la matriz de compras del trimestre.

c) (1.25 puntos) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total.

EJERCICIO 2.

En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km^2, viene dada por la función $f(t) = \frac{11t+20}{t+2}$, siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente, cuando empezamos a medirla?

b) (1.25 puntos) Estudie si la mancha crece o decrece con el tiempo.

c) (0.75 puntos) ¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha?

EJERCICIO 3.

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, de los que se conocen las probabilidades P(A)=0.60 y P(B)=0.25. Determine las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes supuestos:

a) (0.5 puntos) Si A y B fuesen incompatibles.

b) (1 punto) Si A y B fueran independientes.

c) (1 punto) Si P(A/B) = 0.40.

EJERCICIO 4.

El peso de las calabazas de una determinada plantación sigue una ley Normal con desviación típica 1200 g.

a) (2 puntos) Halle el tamaño mínimo de la muestra que se ha de elegir para, con un nivel de confianza del 95%, estimar el peso medio con un error menor de 450 g.

b) (0.5 puntos) Para el mismo nivel de confianza, indique, razonando la respuesta, si el error aumenta o disminuye al aumentar el tamaño de la muestra.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos?

EJERCICIO 2.

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & si\ 2 \leq x \leq 4 \\ -2x + 11 & si\ 4 < x \leq 5 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la derivabilidad de la función f (x) en el punto de abscisa x = 4.

b) (1.5 puntos) Represente gráficamente la función f (x) e indique dónde alcanza su máximo y su mínimo absolutos. ¿Cuál es el valor del máximo? ¿Y del mínimo?

EJERCICIO 3.

En un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0.68, la de que ocurra otro suceso B es 0.2, y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0.27. Halle la probabilidad de que:

a) (1 punto) Ocurran los dos a la vez.

b) (0.75 puntos) Ocurra B pero no A.

c) (0.75 puntos) Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

EJERCICIO 4.

Queremos estudiar la proporción de personas de una población que acceden a internet a través de teléfono móvil. Para ello hacemos una encuesta a una muestra aleatoria de 400 personas de esa población, y obtenemos que 240 de ellas acceden a internet a través del móvil.

a) (1.75 puntos) Determine un intervalo de confianza, al 98.5%, para la proporción de personas de esa población que acceden a internet a través del teléfono móvil.

b) (0.75 puntos) Razone el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza el aumento o disminución del tamaño de la muestra, suponiendo que se mantuvieran la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) En un problema de programación lineal, la región factible es la región acotada cuyos vértices son A(2, −1), B(−1, 2), C(1, 4) y D(5, 0). La función objetivo es la función $f(x, y) = 2x + 3y + k$, cuyo valor máximo, en dicha región, es igual a 19. Calcule el valor de k e indique dónde se alcanza el máximo y dónde el mínimo.

b) (1.5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $B \cdot A + 2X = C$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

a) (1 punto) Determine sus máximos y mínimos relativos.

b) (1 punto) Consideremos la función $g(x) = f\,'(x)$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)$, en el punto de abscisa x = 2.

c) (0.5 puntos) Dibuje la gráfica de $g(x)$ y de la recta tangente calculada en b).

EJERCICIO 3.

Una encuesta realizada en un banco indica que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y un 20% tiene un préstamo de cada tipo. Se elige, al azar, un cliente de ese banco:

a) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.

b) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario sabiendo que no tiene préstamo personal.

EJERCICIO 4.

a) (1.25 puntos) Una población de 6000 personas se ha dividido en 3 estratos, uno con 1000 personas, otro con 3500 y otro con 1500. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 15 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) (1.25 puntos) Dada la población {1, 4, 7}, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que puedan formarse mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas esas muestras.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.25 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Determina la matriz X que verifica $B{\cdot}X = 3A + A^t$.

b) (1.25 puntos) Calcula la matriz Y que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12 & si \quad x < -3 \\ -x + 3 & si \quad -3 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de f (x) en su dominio.
b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) (0.5 puntos) Calcule los extremos relativos

EJERCICIO 3.

En una urna A hay 10 bolas verdes y 10 rojas, y en otra urna B hay 15 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado, de forma que si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en el resto de casos se extrae una bola de la urna B.
a) (1.5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Si la bola extraída resulta ser de color verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

EJERCICIO 4.

El peso de los sobres de café que fabrica una empresa sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.3 g. Se quiere construir un intervalo de confianza para estimar dicha media, con un nivel de confianza del 98%, y para ello se toma una muestra de 9 sobres.
a) (1 punto) ¿Qué amplitud tendrá dicho intervalo?
b) (0.5 puntos) ¿Cómo afectaría a dicha amplitud un aumento del tamaño de la muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza?
c) (1 punto) Obtenga el intervalo de confianza sabiendo que los pesos, en gramos, de los sobres de la muestra son: 7; 7.1; 7; 6.93; 7.02; 7; 7.01; 6.5; 7.1.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

$5x - 4y \leq 20$; $\quad x + 8y \leq 48$; $\quad x \geq 2$; $\quad y \geq 0$.

a) (1.5 puntos) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.
b) (0.5 puntos) Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x, y) = 2x + 12y$ en este recinto e indique dónde se alcanzan.
c) (0.5 puntos) Razone si existen valores (x, y) pertenecientes al recinto para los que $F(x, y) = 100$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x$.
a) (1.25 puntos) Halle los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.
b) (0.75 puntos) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -2$.
c) (0.5 puntos) En el punto de abscisa $x = 1$, ¿la función es creciente o decreciente?

EJERCICIO 3.

En una empresa, el 65% de sus empleados habla inglés, y de éstos, el 40% habla también alemán. De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán. Se escoge un empleado al azar:
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que hable ambos idiomas?
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alemán?
c) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que habla alemán, hable también inglés?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) Los representantes de un partido político creen que la proporción de sus votantes será al menos del 35%. Para confirmarlo eligen una muestra al azar de 1200 votantes y obtienen que 336 de ellos son partidarios de votarles. Mediante un contraste de hipótesis, con: $H_0 : p \geq 0.35$ y a un nivel de significación del 0.01, ¿se puede admitir como cierta la creencia de los representantes del partido político?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule A^3.
b) (1.5 puntos) Determine la matriz X para que $A \cdot X + B \cdot C = D$

EJERCICIO 2.
Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
a) (0.75 puntos) $f(x) = \frac{(x^2-5)^3}{3-x^2}$
b) (0.75 puntos) $g(x) = e^{7x} \cdot (x - 5x^2)^2$.
c) (1 punto) $h(x) = \frac{x \cdot \ln(1-x^2)}{x-3}$

EJERCICIO 3.
Un Centro de Salud propone dos terapias, A y B, para dejar de fumar. De las personas que acuden al Centro para dejar de fumar, el 45% elige la terapia A, y el resto la B.
Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia A y el 80% de los que siguieron la B no han vuelto a fumar.
Se elige al azar un usuario del Centro que siguió una de las dos terapias:
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que después de un año no haya vuelto a fumar.
b) (0.75 puntos) Si transcurrido un año esa persona sigue sin fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.
c) (0.75 puntos) Si transcurrido un año esa persona ha vuelto a fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

EJERCICIO 4.
Se conoce que la acidez de una solución es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 0.2. Se ha tomado una muestra aleatoria de cinco soluciones y se han obtenido las siguientes medidas de la acidez:

7.92 7.95 7.91 7.9 7.94.

a) (1.25 puntos) Halle el intervalo de confianza, al 99%, para la media poblacional.
b) (0.5 puntos) ¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior?
c) (0.75 puntos) Para el mismo nivel de confianza, calcule el tamaño mínimo muestral que permita reducir el error anterior a la mitad.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.
Se desea maximizar la función F(x, y) = 14x + 8y en el recinto dado por:

$y + 3x \geq 9$; $y \leq -\frac{4}{7}x + 14$ $5x - 2y \leq 15$ $x \geq 0$.

a) (1 punto) Represente la región factible del problema.
b) (1 punto) ¿Cuál es el valor máximo de F y la solución óptima del problema?
c) (0.5 puntos) Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo.

EJERCICIO 2.
Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & si\ x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & si\ x \geq 1 \end{cases}$.
a) (0.75 puntos) Determine el dominio y estudie la continuidad de la función.
b) (1 punto) Obtenga los extremos de la función.
c) (0.75 puntos) Estudie su curvatura.

EJERCICIO 3.
De los sucesos independientes A y B se sabe que $P(A^C) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.8$.
a) (1.25 puntos) Halle la probabilidad de B.
b) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.
c) (0.5 puntos) ¿Son incompatibles los sucesos A y B?

EJERCICIO 4.
a) (1.25 puntos) Se considera la población {2, 4, 6}. Escriba todas las posibles muestras de tamaño dos elegidas mediante muestreo aleatorio simple y determine la desviación típica de las medias muestrales.
b) (1.25 puntos) En una ciudad se seleccionó una muestra aleatoria de 500 alumnos de Bachillerato a los que se les preguntó si poseían una determinada marca de teléfono móvil, resultando que 80 de ellos contestaron afirmativamente. Obtenga un intervalo de confianza, al 92%, para estimar la proporción de estudiantes de Bachillerato que poseen esa marca de teléfono móvil.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

"Un barco puede transportar vehículos de dos tipos: coches y motos. Las condiciones de la nave obligan a que el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble; además, la suma del número de motos más el doble del número de coches no puede ser mayor que 100. ¿Cuántos vehículos, como máximo, puede transportar este barco?"

b) (1.5 puntos) Dado el recinto limitado por las inecuaciones

$$y \geq 30, \qquad 3x - y \geq 150, \qquad 6x + 7y \leq 840,$$

halle en qué puntos de ese recinto la función $F(x, y) = 6x - 2y$ alcanza su valor mínimo.

EJERCICIO 2.

(2.5 puntos) Estudie la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ 1 & si \quad 0 < x \leq 3 \\ -x^2 + 6x + 2 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

EJERCICIO 3.

Una granja avícola dedicada a la producción de huevos posee un sistema automático de clasificación en tres calibres según su peso: grande, mediano y pequeño. Se conoce que el 40% de la producción es clasificada como huevos grandes, el 35% como medianos y el 25% restante como pequeños. Además, se sabe que este sistema de clasificación produce defectos por rotura en el cascarón que dependen del peso. Así, la probabilidad de que un huevo grande sea defectuoso por esta razón es del 5%, la de uno mediano del 3% y de un 2% la de uno pequeño. Elegido aleatoriamente un huevo,

a) (1.25 puntos) ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

b) (1.25 puntos) Si el huevo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea grande?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) Un director sanitario sostiene que el Índice de Masa Corporal (IMC) medio de los adolescentes de su distrito no supera el nivel 25 (sobrepeso). Para contrastar su afirmación toma una muestra aleatoria de 225 adolescentes que da como resultado un IMC medio de 26. Sabiendo que el IMC sigue una distribución Normal con desviación típica 5 discuta, mediante un contraste de hipótesis con $H_0 : \mu \leq 25$, si la afirmación del director sanitario es correcta, con un nivel de significación del 5%.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule A^2 y A^{2013}.

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + I_2 = 5B^t - A^2$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & si \;\; x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 6 & si \;\; x > 1 \end{cases}$.

a) (1.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3.

A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.

a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.

b) (0.75 puntos) La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?

c) (1 punto) Si una persona escogida al azar ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?

EJERCICIO 4.

En una población próxima a un puerto deportivo se quiere estimar la proporción de habitantes que navegan al menos una vez a la semana. Se toma una muestra, al azar, de 400 habitantes de la población, de los que 160 afirman navegar al menos una vez en semana.

a) (1.5 puntos) Halle el intervalo de confianza del 90% para la proporción de habitantes que navegan al menos una vez en semana.

b) (1 punto) A la vista del resultado, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota del error de 0.1 con el mismo nivel de confianza del apartado anterior. ¿Cuántos individuos debe tener al menos la muestra?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1.25 puntos] Obtenga a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica?

b) [1.25 puntos] Para los valores $a = 3$ y $b = 1$ calcule la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$.

EJERCICIO 2.

Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función:

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t, \quad 0 \le t \le 8$$

donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

a) [1.5 puntos] Estudie la monotonía y los extremos de *B(t).*

b) [1 punto] Dibuje la gráfica de *B(t)* en el intervalo [0, 8] y explique, a partir de ella, la evolución de los beneficios de esta empresa en sus 8 años de existencia.

EJERCICIO 3.

El 55% de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30% usa vehículo propio y el resto va andando. El 65% de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70% de los que usan vehículo propio son hombres y el 52% de los que van andando son mujeres.

a) (1.5 puntos) Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.

b) (1 punto) Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

EJERCICIO 4.

Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella hay 175 hembras.

a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94%.

b) (1 punto) A la vista del resultado del muestreo se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 0.02, ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,

a) (2 puntos) ¿cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?

b) (0.5 puntos) ¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?

EJERCICIO 2.

Sea $f(x)$ una función cuya función derivada, $f'(x)$, tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1, 0)$ y $(5, 0)$ y con vértice $(2, -4)$.

a) (1 punto) Estudie razonadamente la monotonía de $f(x)$.

b) (0.5 puntos) Determine las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$.

c) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$, sabiendo que $f(2) = 5$.

EJERCICIO 3.

De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que $P(A) = 0.3$ y que $P(B^C) = 0.25$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) (0.75 puntos) $P(A \cup B)$. b) (0.75 puntos) $P(A^C \cap B^C)$. c) (1 punto) $P(A/B^C)$.

EJERCICIO 4.

El tiempo que los españoles dedican a ver la televisión los domingos es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 75 minutos. Elegida una muestra aleatoria de españoles se ha obtenido, para la media de esa distribución, el intervalo de confianza (188.18, 208.82), con un nivel del 99%.

a) (1.5 puntos) Calcule la media muestral y el tamaño de la muestra.

b) (1 punto) Calcule el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 96%.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sea R la región factible definida por las siguientes inecuaciones $x \geq 3y$, $x \leq 5$, $y \geq 1$.

a) (0.5 puntos) Razone si el punto (4.5, 1.55) pertenece a R.

b) (1.5 puntos) Dada la función objetivo $F(x, y) = 2x - 3y$, calcule sus valores extremos en R.

c) (0.5 puntos) Razone si hay algún punto de R donde la función F valga 3.4. ¿Y 7.5?

EJERCICIO 2.

En una empresa de montajes el número de montajes diarios realizados por un trabajador depende de los días trabajados según la función $M(t) = \frac{11t+17}{2t+12}$, $t \geq 1$, donde t es el número de días trabajados.

a) (0.5 puntos) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Cuántos días necesitará para realizar cinco montajes diarios?

b) (0.75 puntos) ¿Qué ocurriría con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?

c) (0.75 puntos) El dueño de la empresa cree que el número de montajes diarios aumenta con los días de trabajo. Estudiando la función, justifique si es cierta dicha creencia.

d) (0.5 puntos) Dibuje la gráfica de la función.

EJERCICIO 3.

Se cree que hay una vuelta hacia estilos de baile más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que al 40% les gusta la salsa, al 30% les gusta el merengue y al 10% les gusta tanto la salsa como el merengue.

a) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?

b) (0.75 puntos) ¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?

c) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue"? ¿Son compatibles?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) En una bodega utilizan una máquina que debe envasar el vino en botellas con un contenido de 750 ml. Para comprobar si esa máquina funciona correctamente, se toma una muestra de 36 botellas y se observa que el contenido medio de las mismas es de 748 ml. Suponiendo que la variable "contenido" sigue una distribución Normal con varianza 25, analice mediante un contraste de hipótesis bilateral ($H_0 : \mu = 750$) si se puede aceptar, con un nivel de significación de 0.05, que la máquina envasadora funciona correctamente.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $2A + B \cdot X = 3A - B$.

b) (1 punto) Determine en cada caso la dimensión de la matriz D para que se puedan realizar las siguientes operaciones: $C \cdot D + A$, $C^t \cdot D \cdot C$, $D \cdot C^t$, $C \cdot D \cdot C^t$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + 1 & si\ x \leq 2 \\ 2x + a & si\ x > 2 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en x = 2 y, además, tenga un mínimo en x = 1.

b) (1 punto) Para $a = 2$ y $b = 6$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = –2.

EJERCICIO 3.

El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.

a) (1 punto) Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague.

b) (0.75 puntos) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo?

c) (0.75 puntos) Ante un préstamo impagado el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo, ¿lleva razón el director?

EJERCICIO 4.

El gasto mensual de las familias de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 180 euros. Seleccionadas 30 familias al azar, han tenido un gasto medio mensual de 900 euros.

(1.25 puntos) Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio mensual de las familias de ese municipio con un nivel de confianza del 95%.

(1.25 puntos) Calcule el tamaño maestral mínimo necesario para estimar el gasto medio mensual de las familias con un error no superior a 60 euros, con el mismo nivel de confianza.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -1 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

a) (0.5 puntos) Determine la dimensión que debe tener una matriz A para que se verifique la igualdad $A \cdot B = 2C^t$.

b) (2 puntos) Halle la matriz A anterior, sabiendo que de ella se conocen los elementos $a_{31} = 2, \quad a_{12} = -3, \quad a_{22} = 1$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + b \cdot x - 1$

a) (1.5 puntos) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en x = 0 y que la gráfica de la función pasa por el punto (0, 0).

b) (1 punto) Para a = 0 y b = 1, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = −1.

EJERCICIO 3.

Sean A y B dos sucesos aleatorios independientes de los que se conoce que: P(A) = 0.5 y P(B) = 0.3.

a) (0.5 puntos) Diga, razonadamente, si A y B son sucesos incompatibles.

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda A y no suceda B?

c) (1 punto) Calcule $P(A/B^C)$.

EJERCICIO 4.

Una panadería produce barras de pan cuya longitud, medida en centímetros, sigue una distribución Normal con una desviación típica de 5 centímetros.

a) (1 punto) A partir de una muestra de 100 barras de pan se ha calculado el intervalo de confianza para la media poblacional, resultando ser (31.2, 33.4). Halle la media muestral y el error de estimación.

b) (1.5 puntos) Para un nivel de confianza del 96%, halle el tamaño muestral mínimo necesario para que el error de estimación máximo sea 1.5.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Un nutricionista receta a una de sus pacientes una dieta semanal especial basada en lácteos y pescado. Cada kg de lácteos cuesta 6 € y proporciona 3 unidades de proteínas y 1 de calorías; cada kg de pescado cuesta 12 €, aportando 1 unidad de proteínas y 2 de calorías.

La dieta le exige no tomar más de 4 kg, conjuntamente, de lácteos y pescado, y un aporte mínimo de 4 unidades de proteínas y 3 de calorías.

a) (1 punto) Plantee el problema para obtener la combinación de ambos alimentos que tenga el coste mínimo.

b) (1.5 puntos) Dibuje la región factible y determine la solución óptima del problema.

EJERCICIO 2.

(2.5 puntos) Sea la función *f*, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 5 & si \quad x < 0 \\ -x^2 + b & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función f sea derivable en x = 0.

EJERCICIO 3.

Un estudio estadístico de la producción de una fábrica de batidoras determina que el 4.5% de las batidoras presenta defectos eléctricos, el 3.5% presenta defectos mecánicos y el 1% presenta ambos defectos. Se escoge al azar una batidora.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos defectos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que tenga un defecto mecánico sabiendo que tiene un defecto eléctrico.

c) (0.5 puntos) Justifique si los sucesos “tener un defecto eléctrico” y “tener un defecto mecánico” son independientes. ¿Son incompatibles?

EJERCICIO 4.

Queremos estudiar la proporción de personas de una población que usan una determinada marca de ropa; para ello se hace una encuesta a 950 personas y se obtiene que 215 de ellas usan esa marca. Utilizando un contraste de hipótesis (H_0: $p \geq 0.25$):

a) (1.5 puntos) ¿Podemos afirmar con estos datos y con un nivel de significación del 5% que al menos el 25% de toda la población usa esa marca de ropa?

b) (1 punto) ¿Y con un nivel de significación del 1%?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.75 puntos) Represente gráficamente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices: $x + 2y \leq 3$, $x - y \leq 1$, $x \geq -1$, $y \geq 0$.

b) (0.75 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = 2x + 4y$ en la región anterior y los puntos donde se alcanzan.

EJERCICIO 2.

Sea la función dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & si \quad x \leq 2 \\ \frac{x+b}{x-1} & si \quad x > 2 \end{cases}$.

a) (1.5 puntos) Determine los valores de a y b, sabiendo que dicha función es derivable.

b) (1 punto) Para $a = 2$ y $b = 3$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1.

EJERCICIO 3.

En un servicio técnico especializado en cámaras fotográficas, el 70% de las cámaras que se reciben son del modelo A y el resto del modelo B. El 95% de las cámaras del modelo A son reparadas, mientras que del modelo B sólo se reparan el 80%. Si se elige una cámara al azar:

a) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que no se haya podido reparar.

b) (1.25 puntos) Si se observa que no ha sido reparada, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

EJERCICIO 4.

Con el fin de estudiar el precio medio del litro de gasolina en una provincia en un determinado día, se seleccionan al azar ese día 9 estaciones de servicio y se observan los siguientes precios, en euros, de un litro de gasolina:

1.3, 1.2, 1.4, 1.27, 1.25, 1.32, 1.37, 1.38, 1.23.

Se sabe que el precio del litro de gasolina se distribuye según una ley Normal con desviación típica igual a 0.18 euros.

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para estimar el precio medio del litro de gasolina.

b) (1 punto) Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el precio medio del litro de gasolina con un error no superior a 0.08 euros, con el mismo nivel de confianza.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Determine los valores de x e y que hacen cierta la igualdad

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2.

El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora t, mediante la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3, \quad 6 \leq t \leq 12$$

a) (0.5 puntos) ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?

b) (2 puntos) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?

EJERCICIO 3.

Se elige un número, al azar, entre el siguiente conjunto:

{225, 201, 162, 210, 180, 172, 156, 193, 218, 167, 176, 222, 215, 120, 190, 171}.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que el número elegido sea impar.

b) (0.75 puntos) Si el número elegido es múltiplo de 5, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor que 200?

c) (0.75 puntos) Determine si son independientes los sucesos S: "el número elegido es mayor que 200" y T: "el número elegido es par".

d) (0.5 puntos) Halle la probabilidad del suceso $S \cup T$.

EJERCICIO 4.

1) En un centro docente la tercera parte de los alumnos estudia el idioma A, la mitad el idioma B y el resto el idioma C (cada alumno estudia sólo uno de estos idiomas).

a) (0.75 puntos) Se desea seleccionar una muestra de 60 alumnos, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional al número de los alumnos de cada idioma. ¿Cómo debería estar conformada la muestra?

b) (0.75 puntos) En otra muestra seleccionada por el procedimiento anterior, el número de alumnos tomados del idioma A es 14. Determine cuántos se han elegido de los otros dos idiomas.

2) (1 punto) Una población tiene 5 elementos. Mediante muestreo aleatorio simple se seleccionan muestras de tamaño 3, siendo la desviación típica de sus medias 2 y la media de las medias muestrales 7. ¿Cuánto valen la media y la varianza de la población?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = (-1 \quad 1)$.

a) (1.25 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que se verifique $(B \cdot A)^t = A \cdot B^t$

b) (1.25 puntos) Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = B$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

a) (1 punto) Estudie la monotonía de f y halle los extremos relativos que posea.

b) (0.75 puntos) Estudie su curvatura y calcule su punto de inflexión.

c) (0.75 puntos) Represente la gráfica de la función f.

EJERCICIO 3.

El 65% de la población española adulta no fuma, el 15% fuma ocasionalmente y el resto fuma habitualmente. Elegidos al azar dos adultos españoles, calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) (1.25 puntos) Los dos sean no fumadores.

b) (1.25 puntos) Uno de ellos sea no fumador y el otro sea fumador ocasional.

EJERCICIO 4.

Para estimar la proporción de balances contables incorrectos de un banco, se seleccionan aleatoriamente 200 balances, y se encuentra que 19 de ellos son incorrectos.

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la proporción de balances incorrectos.

b) (1 punto) ¿Cuántos balances se deberán seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, el error de la estimación no sea superior a 0.02?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Represente la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones: $2x + 5y \le 15$, $x + y \le 6$, $5x - 7y \le 42$, $x \ge 0$.

b) (1 punto) Halle los vértices de la región anterior.

c) (0.5 puntos) En esa región, halle el valor mínimo de la función $F(x, y) = -2x - 2y + 3$ y dónde lo alcanza.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & si \quad x \le 1 \\ \frac{4}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio.

b) (0.5 puntos) Determine sus asíntotas, en caso de que existan.

c) (0.5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

EJERCICIO 3.

Se sabe que el 80% de los visitantes de un determinado museo son andaluces y que el 55% son andaluces y adultos. Además, el 17% de los visitantes son no andaluces y adultos. Se elige, al azar, un visitante del museo:

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea adulto?

b) (1 punto) Si es adulto, ¿cuál es la probabilidad de que sea andaluz?

EJERCICIO 4.

a) (1.5 puntos) Determine todas las muestras de tamaño 2 que, mediante muestreo aleatorio simple, se pueden extraer del conjunto {6, 9, 12} y calcule la varianza de las medias de estas muestras.

b) (1 punto) Una empresa fabrica cuatro productos A, B, C y D, de los que elabora diariamente 40, 15, 25 y 120 unidades respectivamente.

Si un día se quiere elaborar una muestra de 40 unidades con los productos fabricados, por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿qué número de unidades de cada producto se debe elegir?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) (0.5 puntos) Efectúe la operación $A \cdot B^t$.

b) (0.75 puntos) Determine la matriz X tal que $A + 2X = B$.

c) (1.25 puntos) Calcule la matriz Y, sabiendo que $B \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2.

(2.5 puntos) Sean las funciones $f(x) = (2x^2 - 1)^3 \ln(x^4)$ y $g(x) = \frac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$

Determine el valor de $f'(-1)$ y de $g'(0)$.

EJERCICIO 3.

En un Instituto de Educación Secundaria el 40% de los alumnos juegan al fútbol, el 30% juegan al baloncesto y el 20% practican ambos deportes.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno, elegido al azar, no practique ninguno de los dos deportes?

b) (0.75 puntos) Si un alumno, elegido al azar, juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no juegue al baloncesto?

c) (0.75 puntos) ¿Son independientes los sucesos "jugar al fútbol" y "jugar al baloncesto"?

EJERCICIO 4.

Los responsables de tráfico de una ciudad trabajan con la hipótesis de que, al menos, el 65% de sus habitantes son favorables a la creación de una red de carril-bici en esa ciudad.

Encuestados 950 habitantes, elegidos al azar, 590 están a favor de tal medida.

a) (1.5 puntos) Mediante un contraste de hipótesis, (H_0: $p \geq 0.65$), con un nivel de significación del 10%, ¿se puede decir que tienen razón los responsables de tráfico de esa ciudad?

b) (1 punto) ¿Se concluiría lo mismo si el nivel de significación fuera del 1%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = 2 \cdot (C - D^t)$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Si A(0, 2), B(2, 0), C(4, 0), D(6, 3) y E(3, 6) son los vértices de una región factible, determine, en esa región, el valor mínimo y el valor máximo de la función F(x, y) = 4x − 3y + 8 e indique los puntos donde se alcanzan.

EJERCICIO 2.

(2.5 puntos) Represente gráficamente la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

EJERCICIO 3.

El 25% de los estudiantes de una Universidad lee las noticias en prensa escrita en papel, el 70% en prensa digital y el 10% en ambos formatos. Elegido, al azar, un estudiante de esa Universidad:

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que lea las noticias en formato papel o digital.

b) (0.75 puntos) Sabiendo que lee las noticias en prensa digital, calcule la probabilidad de que también las lea en prensa escrita en papel.

c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que lea las noticias exclusivamente en uno de los dos formatos?

EJERCICIO 4.

Para estimar la proporción de habitantes que es favorable a la construcción de un centro comercial en un municipio, se ha obtenido el intervalo de confianza (0.31, 0.39), al 94%.

a) (1 punto) ¿Cuál ha sido el valor de la proporción muestral?

b) (0.5 puntos) Si la muestra aleatoria elegida de esa población para el estudio fue de 500 personas, ¿cuántas de ellas deseaban la construcción del centro comercial?

c) (1 punto) Se desea repetir el estudio para obtener un intervalo de confianza con un error máximo de 0.03 y el mismo nivel de confianza. ¿Cuántas personas, como mínimo, debe tener la nueva muestra aleatoria?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) [1 punto] Obtenga la matriz A^{2014}.

b) [1.5 puntos] Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

EJERCICIO 2.

La función de beneficios *f*, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida *x*, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por $f(x) = -2x^2 + 36x + 138$, $x \geq 0$.

a) [1 punto] Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo.

b) [0.5 puntos] Calcule $f'(7)$ e interprete el signo del resultado.

c) [1 punto] Dibuje la función de beneficios $f(x)$. ¿Para qué valor o valores de la inversión, *x*, el beneficio es de 138 mil euros?

EJERCICIO 3.

Una urna, A, contiene siete bolas numeradas del 1 al 7. Otra urna, B, contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que si sale cara, extraeremos una bola de la urna A, y si sale cruz, la extraemos de la urna B. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) [0.5 puntos] “La bola haya sido extraída de la urna A y el número sea par”.

b) [1 punto] “El número de la bola extraída sea par”.

c) [1 punto] “la bola sea de la urna A, si ha salido un número par”.

EJERCICIO 4.

Se quiere hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de narrativa que se venden en la actualidad. Para ello se elige una muestra aleatoria de 121 libros, encontrando que tienen un precio medio de 23 €. Se sabe que el precio de los libros de narrativa sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 5 €.

a) [1.5 puntos] Obtenga un intervalo de confianza, al 98%, para el precio medio de esos libros.

b) [1 punto] ¿Cuántos libros habría que elegir como muestra para que, con la misma confianza, el error máximo de la estimación no excediera de 1 €?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) [1.8 puntos] Dadas las inecuaciones $y \leq x + 5$, $2x + y \geq -4$, $4x \leq 10 - y$, $y \geq 0$ represente el recinto que limitan y calcule sus vértices.

b) [0.7 puntos] Obtenga el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanzan.

EJERCICIO 2.

Sea la función *f* definida por $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & si\ x \leq 2 \\ \frac{60}{x} & si\ x > 2 \end{cases}$.

a) [1.5 puntos] Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.

b) [1 punto] Para $a = 48$ y $b = 3$, estudie la monotonía de $f(x)$ y calcule sus extremos.

EJERCICIO 3.

Antonio va a la compra dos días de cada cinco. A lo largo del tiempo, ha observado que la fruta está de oferta la tercera parte de los días que va a la compra y la mitad de los días que no va. Elegido un día al azar:

a) [1.5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la fruta esté de oferta ese día?

b) [1 punto] Calcule la probabilidad de que ese día Antonio vaya a la compra o la fruta esté de oferta.

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) Un titular de prensa afirma que el 70% de los jóvenes de una ciudad utilizan las redes sociales para comunicarse.

Para contrastar la veracidad de tal afirmación se toma una muestra aleatoria de 500 jóvenes de esa ciudad, y se obtiene que 340 de ellos utilizan la red para comunicarse.

Analice mediante un contraste de hipótesis bilateral, ($H_0 : p = 0.7$), si se puede aceptar, con un nivel de significación del 1%, que dicha afirmación es cierta.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) [1.25 puntos] Calcule las matrices X e Y para las que se verifica: $X + Y = A$ y $3X + Y = B$

b) [1.25 puntos] Halle la matriz Z que verifica $B \cdot Z + B^t = 2I_2$.

EJERCICIO 2.

Una empresa ha realizado un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, que ha obtenido en los últimos 10 años. La función a la que se ajustan dichos beneficios viene dada por $B(t) = 2t^3 - 36t^2 + 162t - 6$, con $0 \leq t \leq 10$.

a) (0.8 puntos) ¿Qué beneficios obtuvo al inicio del periodo (t = 0) y al final del décimo año (t = 10)?

b) (1.7 puntos) ¿En qué momentos se obtiene el máximo y el mínimo beneficio y cuáles fueron sus cuantías?

EJERCICIO 3.

Se sabe que dos alumnos de la asignatura de Matemáticas asisten a clase, de forma independiente, el primero a un 85% de las clases y el segundo a un 35%. Tomado al azar un día de clase, calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) [0.75 puntos] Que los dos hayan asistido a clase ese día.

b) [0.75 puntos] Que alguno de ellos haya asistido a clase ese día.

c) [0.5 puntos] Que ninguno haya asistido a clase ese día.

d) [0.5 puntos] Que haya asistido a clase el segundo, sabiendo que el primero no ha asistido.

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) La concejalía de Educación de una determinada localidad afirma que el tiempo medio dedicado a la lectura por los jóvenes de entre 15 y 20 años de edad es, a lo sumo, de 8 horas semanales. Para contrastar esta hipótesis ($H_0 : \mu \leq 8$), se escoge al azar una muestra de 100 jóvenes, de entre 15 y 20 años, y se obtiene una media de 8.3 horas de dedicación a la lectura. Supuesto que el tiempo dedicado a la lectura sigue una ley Normal con desviación típica igual a 1 hora, ¿qué se puede decir, a un nivel de significación del 5%, sobre la afirmación de la concejalía?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

"Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños, pequeños y grandes. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada envase grande. ¿Qué número de envases de cada tipo proporciona el mínimo coste de almacenaje?"

b) (1 punto) Represente el recinto que determinan las inecuaciones

$$2x \geq 10 + y, \qquad x \leq 2(5 - y), \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = -x^2 + px + q$

a) (1.5 puntos) Calcule los valores que deben tener p y q para que la gráfica de la función f pase por el punto $(-4, -5)$ y presente un máximo en el punto de abscisa $x = -1$. Determine el valor de $f(x)$ en ese punto.

b) (1 punto) Represente la gráfica de f para $p = 2$ y $q = -1$ y halle la ecuación de la recta tangente a esta gráfica en el punto de abscisa $x = -2$.

EJERCICIO 3.

En una tienda de complementos disponen de 100 bolsos, de los cuales 80 son de una conocida marca y 20 son imitaciones casi perfectas de dicha marca. Una inspección encarga a un experto el peritaje de los bolsos de la tienda. Se sabe que este experto acierta en el 95% de sus peritajes cuando el bolso es auténtico y que detecta el 98% de las imitaciones. Se elige, al azar, un bolso para su examen:

a) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que el experto acierte en su dictamen sobre ese bolso.

b) (1.25 puntos) Si el experto no ha acertado en su peritaje, calcule la probabilidad de que el bolso sea auténtico.

EJERCICIO 4.

El peso de los huevos de una granja sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 1.23 gramos. Para estimar la media poblacional se ha tomado una muestra de dos docenas de huevos que han dado un peso total de 1615.2 gramos.

a) (1.75 puntos) Halle un intervalo de confianza, al 96% para la media poblacional.

b) (0.75 puntos) Con el mismo nivel de confianza anterior, si nos exigieran que el intervalo tuviera una amplitud máxima de 0.8, ¿de qué tamaño, como mínimo, habría que tomar la muestra?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) (0,75 puntos) Efectúe la operación $A \cdot B^t$.

b) (0,75 puntos) Determine la matriz X tal que $A + 2 \cdot X = B$.

c) (1 punto) Halle la matriz Y tal que $B \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2.

Una entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R(x), en miles de euros, viene dada por la función

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5 \quad 1 \le x \le 500$$

a) (1 punto) Determine qué cantidad de dinero se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad.

b) (0,5 puntos) ¿Qué rentabilidad se obtendrá con dicha inversión?

c) (1 punto) ¿Cuál es la cantidad de dinero para la que se obtiene menor rentabilidad?

EJERCICIO 3.

a) (1 punto) Un ilusionista tiene seis cartas: cuatro ases y dos reyes. Saca una carta, la enseña al público y, si verla, la vuelve a mezclar con las demás. A continuación saca una segunda carta que resulta ser un as. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as?

b) (1,5 puntos) Si el ilusionista no devolviera la primera carta a la baraja y la segunda carta extraída fuera un as, ¿cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) La talla media de los alumnos de una Universidad sigue una distribución Normal de media 170 cm y desviación típica 6 cm. Estudios recientes hacen sospechar que dicha talla media ha aumentado. Para confirmar, o no, esa sospecha se ha tomado una muestra de 64 estudiantes de esa Universidad, cuya talla media ha resultado ser de 172 cm. Con un nivel de significación del 1%, plantee un contraste de hipótesis (H_0: $\mu \le 170$), determine la región crítica de ese contraste y razone si se puede concluir que la talla media poblacional ha aumentado.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región factible definida por las siguientes restricciones:

$$4x + 2y \ge 5 \quad 2x + 5y \le 10 \quad 2x + 2y \le 6 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$$

y calcule sus vértices.

b) (0,5 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = x + 2y$ en la región anterior y los puntos donde se alcanzan.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax - 12) & si \quad x < -1 \\ -x^2 + b(x-1) & si \quad x \ge -1 \end{cases}$

a) (1,5 puntos) Halle los valores de a y b sabiendo que la función es derivable en x = –1.

b) (1 punto) Para a = 1 y b = –1 obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa x = –2.

EJERCICIO 3.

El 30% de los habitantes de una ciudad lee el diario A, el 13% el diario B, y el 6% ambos diarios.

a) (1,25 puntos) ¿Qué porcentaje de habitantes de esta ciudad no lee ninguno de los diarios?

b) (1,25 puntos) Si se elige al azar un habitante de esta ciudad de entre los no lectores del diario B, ¿cuál es la probabilidad de que lea el diario A?

EJERCICIO 4.

El tiempo en horas dedicado cada día al uso de una aplicación de mensajería instantánea por los estudiantes de bachillerato de una ciudad, es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 0.5 horas. Se toma una muestra aleatoria de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos de uso en horas:

3,5 4,25 2,25 3,75 4,2 2,75 1,25 1,2 1,75 2,1

a) (1,5 puntos) Determine un intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio diario dedicado al uso de esta aplicación por los estudiantes.

b) (1 punto) Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el tiempo medio diario dedicado al uso de esta aplicación, para un error de estimación no superior a 0,1 horas y mismo nivel de confianza anterior.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 1), \quad D = (1 \quad -1 \quad 2)$$

a) (0,8 puntos) Estudie cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante:

$$A \cdot B^t \quad C^t \cdot D \quad B^t \cdot D \quad D \cdot B^t$$

b) (0,5 puntos) Despeje la matriz X en la ecuación $X \cdot A^{-1} + 2B = 3C^t \cdot D$, sin calcular sus elementos.

c) (1,2 puntos) Calcule la matriz $A \cdot (B^t - 2D^t \cdot C)$.

EJERCICIO 2.

La mosca común solamente vive si la temperatura media de su entorno está comprendida entre 4°C y 36°C. La vida en días, en función de la temperatura media T, medida en grados centígrados, viene dada por la función:

$$V(T) = \frac{-1}{16}(T^2 - 40T + 16), \quad T \epsilon [4, 36].$$

a) (1 punto) Determine la vida máxima que puede alcanzar la mosca común.

b) (1 punto) Calcule la vida mínima e indique la temperatura media a la que se alcanza.

c) (0,5 puntos) Si sabemos que una mosca ha vivido 15 días, ¿a qué temperatura media ha estado el entorno donde ha habitado?

EJERCICIO 3.

El 70% de los clientes de un supermercado realizan las compras en el local y el resto de los clientes las realizan por internet. De las compras realizadas en el local, sólo el 30% supera los 100 €, mientras que de las realizadas por internet el 80% supera esa cantidad.

a) (1,5 puntos) Elegida una compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 100 €?

b) (1 punto) Si se sabe que una compra supera los 100 €, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hecho en el local?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) Una característica poblacional X sigue una distribución Normal N(μ, 2.1). Sobre ella se formula un contraste de hipótesis bilateral con H_0: μ = 5.5 a un nivel de significación del 8%. Se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 25 que proporciona una media muestral de 6.3. Plantee dicho contraste, determine su región crítica y razone si se puede aceptar la hipótesis nula.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Un supermercado tiene almacenados 600 kg de manzanas y 400 kg de naranjas. Para incentivar su venta elabora dos tipos de bolsas: A y B.

Las bolsas de tipo A contienen 3 kg de manzanas y 1 kg de naranjas; las bolsas de tipo B incluyen 2 kg de cada uno de los productos.

El precio de venta de la bolsa A es de 4 € y de 3 € el de la bolsa de tipo B.

Suponiendo que vende todas las bolsas preparadas, ¿cuántas bolsas de cada tipo debe haber elaborado para maximizar los ingresos? ¿A cuánto asciende el ingreso máximo?

EJERCICIO 2.

Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) (0,9 puntos) $f(x) = \frac{2\cdot(1-3x)^2}{1+3x}$.

b) (0,8 puntos) $g(x) = (x^2 - x + 1) \cdot e^{5x}$.

c) (0,8 puntos) $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$.

EJERCICIO 3.

Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cap B^C) = 0{,}1$.

a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra A y ocurra B.

b) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A pero sí ocurra B.

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

d) (0,5 puntos) ¿Son independientes A y B?

EJERCICIO 4.

Se ha lanzado un dado 400 veces, y en 72 de ellas ha salido un tres.

a) (2 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 99,2%, para la proporción de veces que se obtiene un tres.

b) (0,5 puntos) Calcule el error máximo admisible cometido con ese intervalo.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1.25 puntos) Resuelva la ecuación $A \cdot X + B \cdot X = C$.

b) (1.25 puntos) Calcule A^4 y A^{80}.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & si \quad 0 < x < 4 \\ x^2 - 8x + 17 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

a) (1.2 puntos) Represente gráficamente la función *f*.
b) (0.8 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.
c) (0.5 puntos) Calcule $f'(1)$ y $f'(5)$.

EJERCICIO 3.

a) (1.5 puntos) Calcule la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de sus puntuaciones sea un múltiplo de 4.
b) (1 punto) De un experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades

$$P(A^C) = 0.8, \quad P(B^C) = 0.7, \quad P(A \cup B) = 0.5$$

¿Son A y B incompatibles?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) El servicio de atención al cliente de una empresa funciona eficazmente si el tiempo medio de atención es inferior o igual a 7 minutos. Se toma una muestra de 36 clientes atendidos y se observa que el tiempo medio es de 8 minutos. Suponiendo que el tiempo empleado en atender a un cliente sigue una distribución Normal con varianza 16, plantee un contraste de hipótesis $(H_0: \mu \leq 7)$, con un nivel de significación de 0.05, determine la región crítica de este contraste y razone si se puede aceptar que ese servicio funciona de forma eficaz.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sea el siguiente conjunto de inecuaciones:

$$x - 3y \leq 8; \quad 3x + 2y \geq 15; \quad x + 3y \leq 12; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

a) (1 punto) Dibuje el recinto del plano determinado por estas inecuaciones.
b) (1 punto) Determine los vértices de este recinto.
c) (0.5 puntos) Maximice la función $F(x, y) = 5x + 9y$ en este recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

EJERCICIO 2.

Se considera la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
a) (1.3 puntos) Halle el máximo, el mínimo y el punto de inflexión de la función.
b) (0.6 puntos) Calcule los puntos de corte con los ejes.
c) (0.6 puntos) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisas x = 0 y x = 1.

EJERCICIO 3.

Una empresa dedicada a la producción de jamones ibéricos dispone de dos secaderos, A y B, con distintas condiciones ambientales y de almacenamiento. En el secadero B se curan la tercera parte de los jamones. El 25% de los jamones curados en el secadero A son catalogados como Reserva, mientras que en el B este porcentaje asciende al 80%.
Elegido un jamón al azar de uno de los secaderos, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) (1.5 puntos) El jamón no es de Reserva.
b) (1 punto) Si el jamón es de Reserva, que proceda del secadero A.

EJERCICIO 4.

De una población Normal de media desconocida μ y desviación típica 2 se extrae la siguiente muestra aleatoria simple de tamaño 10:

3.8 6.3 4.3 6 6.2 5.8 1.5 3.3 3.4 2.9

a) (1.5 puntos) Estime, mediante un intervalo de confianza, la media poblacional para un nivel de confianza del 92%. Obtenga su error de estimación.
b) (1 punto) ¿Qué tamaño muestral mínimo sería necesario para reducir ese error a la mitad, con el mismo nivel de confianza?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$.

b) (1 punto) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule los valores de a y b para que se verifique la ecuación $M \cdot A = A$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{x+4} & si \quad x < 2 \\ x^3 - 3x^2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) (1.5 puntos) Determine y represente gráficamente sus asíntotas. Calcule el punto donde la gráfica de la función *f* corta al eje de ordenadas.

b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en x = −3.

EJERCICIO 3.

Un estudio estadístico determina que la noche del 31 de diciembre conduce el 5% de la población, el 20% consume alcohol esa noche y el 2% conduce y consume alcohol.

a) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "conducir" y "consumir alcohol"?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de la población no conduce ni consume alcohol esa noche?

c) (1 punto) De las personas que consumen alcohol, ¿qué porcentaje conduce esa noche?

EJERCICIO 4.

El capital de las hipotecas constituidas sobre fincas urbanas en Andalucía es una variable aleatoria Normal con desviación típica 10000 €.

a) (2 puntos) Se toma una muestra aleatoria de 9 hipotecas con los siguientes capitales (en euros):

95000 99000 105000 106000 108000 111000 112000 115000 120000

Construya un intervalo de confianza, al 95%, para el capital medio de dichas hipotecas.

b) (0.5 puntos) ¿Qué número mínimo de hipotecas deberíamos considerar en una muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo en la estimación del capital medio sea de 4000€?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Se desea invertir 100000 € en dos productos financieros A y B que tienen una rentabilidad del 2% y del 2.5% respectivamente. Se sabe que el producto B exige una inversión mínima de 10000 € y, por cuestiones de riesgo, no se desea que la inversión en B supere el triple de lo invertido en A. ¿Cuánto se debe invertir en cada producto para que el beneficio sea máximo y cuál sería dicho beneficio?

EJERCICIO 2.

Se considera la función *f*, definida a trozos por la expresión

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 6 & si \quad x \leq 2 \\ x + 2 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad de la función.

b) (0.5 puntos) Analice la derivabilidad de la función.

c) (1.5 puntos) Represéntela gráficamente, determinando los extremos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de corte con los ejes.

EJERCICIO 3.

Una enfermedad puede estar provocada por solo una de estas tres causas: A, B o C. La probabilidad de que la causa sea A es 0.3, la de que sea B es 0.2 y la de que sea C es 0.5. El tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 20% de los casos si está provocada por A, en el 55% si la causa es B y en el 10% si la causa es C.

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo con la citada enfermedad no necesite hospitalización?

b) (1 punto) Si un enfermo está hospitalizado debido a esta enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que la causa haya sido A?

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) El peso medio de los pájaros de una determinada especie que habita en un parque natural se consideraba no inferior a 110 g, pero los biólogos del parque sostienen ahora la hipótesis de que dicho peso medio ha disminuido a consecuencia del cambio climático. Se ha tomado una muestra de 100 pájaros de esta especie y se ha obtenido un peso medio de 108 g. Se sabe que la variable que mide el peso de los pájaros de esta especie sigue una distribución Normal con desviación típica igual a 6 g. Plantee un contraste de hipótesis ($H_0: \mu \geq 110$), con un nivel de significación del 5%, determine la región crítica de este contraste y, utilizando ésta, razone si con ese nivel se puede aceptar que los biólogos del parque están en lo cierto.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Con motivo de su inauguración, una heladería quiere repartir dos tipos de tarrinas de helados. El primer tipo de tarrina está compuesto por 100 g de helado de chocolate, 200 g de helado de straciatella y 1 barquillo. El segundo tipo llevará 150 g de helado de chocolate, 150 g de helado de straciatella y 2 barquillos. Sólo se dispone de 8 kg de helado de chocolate, 10 kg de helado de straciatella y 100 barquillos.

¿Cuántas tarrinas de cada tipo se deben preparar para repartir el máximo número posible de tarrinas?

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{3\ln(x)}{x^3},\quad g(x)=(1-x^2)(x^3-1)^2,\quad h(x)=3x^2-7x+\frac{1}{e^{2x}}$$

b) (1 punto) Halle las asíntotas de la función $p(x)=\frac{7x}{3x-12}$

EJERCICIO 3.

De los 700 alumnos matriculados en una asignatura, 210 son hombres y 490 mujeres. Se sabe que el 60% de los hombres y el 70% de las mujeres aprueban dicha asignatura. Se elige una persona al azar.

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura?

b) (1 punto) Sabiendo que ha aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

EJERCICIO 4.

La calificación de Matemáticas de los alumnos de un centro docente es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de desviación típica 1.2. Una muestra de 10 alumnos ha dado las siguientes calificaciones:

3 8 6 3 9 1 7 7 5 6

a) (1.75 puntos) Se tiene la creencia de que la calificación media de los alumnos del centro en Matemáticas es a lo sumo 5 puntos. Con un nivel de confianza del 5%, plantee el contraste unilateral correspondiente (H_0: $\mu \leq 5$), determine la región crítica y razone si la creencia es fundada o no.

b) (0.75 puntos) ¿Obtendría la misma respuesta si el nivel de significación fuese del 15%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

a) (1,7 puntos) Calcule las matrices X e Y si $X+Y=2A$ y $X+B=2Y$.

b) (0.8 puntos) Analice cuáles de las siguientes operaciones con matrices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D:

$$A+D=C \quad A\cdot D=C^t \quad D\cdot A=C \quad D\cdot A=C^t$$

EJERCICIO 2.

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & si \quad 0\leq x\leq 2\\ \frac{8x+a}{x-1} & si \quad x>2\end{cases}$

a) (1 punto) Determine el valor de a para que la función sea continua.

b) (0.75 puntos) ¿Para $a=-10$, es creciente la función en $x=3$?

c) (0.75 puntos) Halle sus asíntotas para $a=-10$.

EJERCICIO 3.

La proporción de personas de una población que tiene una determinada enfermedad es de 1 de cada 500 personas. Se dispone de una prueba para detectar dicha enfermedad. La prueba detecta la enfermedad en el 90% de los casos en que la persona está enferma, pero también da como enfermas al 5% de las personas sanas.

a) (1.25 puntos) Se elige al azar una persona y se le hace la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido diagnosticada correctamente?

b) (1.25 puntos) Si la prueba ha diagnosticado que la persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté? ¿Y de que esté sana?

EJERCICIO 4.

Un fabricante de tuberías de PVC sabe que la distribución de los diámetros interiores de los tubos de conducción de agua que produce sigue una ley Normal con varianza $\sigma^2=0.25\ mm^2$. Para estimar el diámetro medio de esas tuberías, toma una muestra aleatoria de 64 tubos y comprueba que el diámetro medio de esa muestra es de 20 mm.

a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98% para la media de los diámetros de los tubos que fabrica.

b) (1 punto) Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa distribución para que la amplitud de un intervalo de confianza, con ese mismo nivel de confianza, sea inferior a 2 mm.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

a) (0.5 puntos) Calcule A^2.
b) (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + 4B = C^t$.

EJERCICIO 2.

a) (1 punto) Determine el valor de a para que sea continua en x = –1 la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & si \quad x \leq -1 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 2 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

b) (1.5 puntos) calcule los coeficientes b y c de la función $g(x) = x^3 + bx^2 + cx - 2$ para que (1, 2) sea un punto de inflexión de g.

EJERCICIO 3.

Lucía quiere ir de vacaciones a la costa. En su guía de viajes lee que en esa época del año llueve dos días a la semana y que hace viento el 25% de los días que llueve y el 40% de los días que no llueve. Elegido un día de esa época,
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento?
b) (0.75 puntos) Si hace viento, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo?
c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva y no haga viento?

EJERCICIO 4.

a) (1.5 puntos) En una muestra aleatoria de 100 botellas de agua mineral se encontró un contenido medio de 48 cl. Sabiendo que la variable "contenido de agua en una botella" sigue una ley Normal con desviación típica 5 cl, determine un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 95%.
b) (1 punto) ¿Qué tamaño muestral mínimo debería considerarse para estimar esta media con el mismo nivel de confianza y un error inferior a 0.5 cl?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Se dispone de 160 m de tejido de pana y 240 m de tejido de lana para hacer trajes y abrigos. Se usa 1 m de pana y 2 m de lana para cada traje, y 2 m de pana y 2 m de lana para cada abrigo. Cada traje se vende a 250 € y cada abrigo a 350 €.
a) (2 puntos) ¿Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?
b) (0.5 puntos) ¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido? En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo?

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$.
a) (1.7 puntos) Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.
b) (0.8 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

EJERCICIO 3.

En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas. En otra urna B hay 4 bolas verdes, 5 rojas y 1 negra. Se lanza un dado, si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A, y si sale mayor o igual que 3 se saca una bola de la urna B.
a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bola sea verde si ha salido un 4.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la bola elegida sea roja.
c) (1 punto) Sabiendo que ha salido una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

EJERCICIO 4.

La concentración de arsénico en los moluscos de una zona costera sigue una ley Normal con desviación típica 6 mg/kg. Para verificar la calidad de estos moluscos se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 para contrastar si la media poblacional no supera el límite máximo de 80 mg/kg permitido por la normativa sanitaria ($H_0: \mu \leq 80$)
a) (1.5 puntos) Determine la región crítica de este contraste a un nivel de significación del 5%.
b) (1 punto) ¿Debe rechazarse esta hipótesis nula, al nivel del 5%, si en esa muestra de 36 moluscos se encuentra una concentración media de arsénico de 82 mg/kg?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1.7 puntos) Resuelva la ecuación matricial $C \cdot B \cdot X - 2A \cdot X = A^t$.

b) (0.8 puntos) Analice cuáles de las siguientes operaciones, sin efectuarlas, se pueden realizar y justifique las respuestas: $B \cdot C + 2A$, $A \cdot C + C$, $B^t \cdot C$, $C \cdot B - A$.

EJERCICIO 2.

(2.5 puntos) Una fábrica produce entre 1000 y 6000 bombillas al día. El coste diario de producción, en euros, de x bombillas viene dado por la función

$$C(x) = 9000 + 0.08x + \frac{2000000}{x}, \quad con\ 1000 \le x \le 6000$$

¿Cuántas bombillas deberían producirse diariamente para minimizar costes? ¿Cuál sería dicho coste?

EJERCICIO 3.

El 60% de los jóvenes de una ciudad usa Facebook, el 80% usa WhatsApp y el 4% usa Facebook pero no WhatsApp.

a) (0.5 puntos) Halle el porcentaje de jóvenes de esa ciudad que usa ambas aplicaciones.

b) (0.75 puntos) Calcule el porcentaje de esos jóvenes que usa WhatsApp pero no Facebook.

c) (0.75 puntos) Entre los jóvenes que usan WhatsApp, ¿qué porcentaje usa también Facebook?

d) (0.5 puntos) Los sucesos "usar Facebook" y "usar WhatsApp", ¿son independientes?

EJERCICIO 4.

a) (1.5 puntos) La talla de los individuos de una población sigue una distribución Normal con desviación típica 8 cm y media desconocida. A partir de una muestra aleatoria se ha obtenido un intervalo de confianza al 95% para estimar la talla media poblacional, que ha resultado ser (164.86, 171.14) en cm.

Calcule la talla media de la muestra y el tamaño muestral mínimo necesario para reducir a la mitad el error máximo de estimación anterior.

b) (1 punto) En un club privado con 243 usuarios se ha seleccionado una muestra para hacer un sondeo, según la actividad realizada y por muestreo aleatorio estratificado. En esa muestra, 5 usuarios practican Yoga, 7 Pilates y 15 Mantenimiento, ¿cuántos usuarios están inscritos en cada actividad en ese club?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Una empresa fabrica dos tipos de agua de colonia, A y B. La colonia A contiene un 5% de extracto de rosas y un 10% de alcohol, mientras que la B se fabrica con un 10% de extracto de rosas y un 15% de alcohol. El precio de venta de la colonia A es de 24 €/litro y el de la B es de 40 €/litro. Se dispone de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol. ¿Cuántos litros de cada colonia convendría fabricar para que el importe de la venta de la producción sea máximo?

EJERCICIO 2.

Los beneficios de una empresa, en miles de euros, han evolucionado en los 25 años de su existencia según una función del tiempo, en años, dada por la siguiente expresión:

$$B(t) = \begin{cases} 4t & si \quad 0 \le t < 10 \\ -\frac{1}{5}t^2 + 8t - 20 & si \quad 10 \le t \le 25 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de B en el intervalo [0, 25].

b) (1 punto) Estudie la monotonía de esta función y determine en qué año fueron mayores los beneficios de esta empresa y cuál fue su beneficio máximo.

c) (0.5 puntos) Represente gráficamente esta función.

EJERCICIO 3.

De los sucesos A y B de un experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P((A \cup B)^C) = 0.1$

a) (0.75 puntos) Razone si A y B son sucesos compatibles.

b) (0.75 puntos) Razone si A y B son sucesos independientes.

c) (0.5 puntos) Calcule $P(A \cap B^C)$.

d) (0.5 puntos) Calcule $P(A/B^C)$.

EJERCICIO 4.

(2.5 puntos) En un artículo de internet se afirma que el número medio de mensajes de WhatsApp que mandan los jóvenes al día no es inferior a 40.

Para contrastar dicha información se elige una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se observa que envían una media de 38 mensajes al día. Se sabe que el número de mensajes enviados diariamente sigue una distribución Normal de desviación típica 2. Con un nivel de significación del 5% plantee un contraste, (H_0: $\mu \ge 40$), determine la región de rechazo y concluya si ¿se puede aceptar la afirmación del artículo de internet?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sea la región factible definida por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \leq 20 \quad x - y \geq 0 \quad 5x - 13y + 8 \leq 0$$

a) (1.5 puntos) Represéntela gráficamente y calcule sus vértices.
b) (0.4 puntos) Razone si el punto (3, 2.5) está en la región factible.
c) (0.6 puntos) Determine el valor máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = x - y + 6$ en esa región y los puntos en los que se alcanzan.

EJERCICIO 2.

a) (1.2 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot (3x^3 + 5x)^3 \quad g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

b) (0.7 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$ en el punto de abscisa x = 1.

c) (0.6 puntos) Determine, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de la función $h(x)$.

EJERCICIO 3.

En un centro de estudios que tiene 250 estudiantes, hay 50 que tienen problemas visuales y 20 que tienen problemas auditivos. Los sucesos "tener problemas visuales" y "tener problemas auditivos" son independientes.
Se elige un estudiante al azar, calcule las probabilidades de los sucesos siguientes:
a) (0.75 puntos) Tener problemas visuales y auditivos.
b) (0.75 puntos) No tener problemas visuales ni auditivos.
c) (1 punto) Tener algún problema auditivo si no tiene problemas visuales.

EJERCICIO 4.

Se sabe que el diámetro de las estrellas de mar de una región sigue una ley Normal con varianza 2.25 cm². Se sospecha que, igual que ocurre en otras regiones, su diámetro no supera los 11.7 cm (H_0: $\mu \leq 11.7$). Para confirmarlo se extrae una muestra aleatoria de estrellas de mar de esa región, obteniéndose los siguientes diámetros:

12.5 11.8 13.1 14.3 11.7 12.6 12.7 12.1 13.5 11.5

a) (1.75 puntos) Plantee un contraste de hipótesis, y para un nivel de significación del 5%, obtenga la región de rechazo del contraste. ¿Se puede confirmar la sospecha?
b) (0.75 puntos) ¿Y para un nivel de significación del 3%, se puede confirmar la sospecha?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot (B \cdot B^t) = \frac{1}{2}A - 2A^t$.

b) (1 punto) Razone cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse e indique, en su caso, la dimensión de la matriz resultante:

$$A \cdot B, \quad A \cdot B^t, \quad B \cdot A^{-1}, \quad B^t \cdot A + A^{-1}$$

EJERCICIO 2.

La función de costes de una fábrica, $f(x)$, en miles de euros, viene dada por la expresión: $f(x) = 2x^2 - 36x + 200$, donde x es la cantidad fabricada del producto, en miles de kilogramos.
a) (0.8 puntos) Determine la cantidad a fabricar para minimizar el coste y calcule este coste mínimo.
b) (0.8 puntos) A partir del signo de $f'(7)$, ¿qué se puede decir del coste para una producción de siete mil kilogramos?
c) (0.9 puntos) Dibuje la gráfica de la función de costes. ¿Para qué cantidad o cantidades fabricadas el coste es de 200000 €?

EJERCICIO 3.

En un aeropuerto internacional operaron 300000 vuelos en un determinado año, distribuidos de la siguiente forma: 150000 en la terminal A, 100000 en la B y 50000 en la C. En ese año se sabe que sufrieron retrasos el 10% de los vuelos de la terminal A, el 8% de la B y el 5% de la C. Determine, para un vuelo elegido al azar, las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) (1.25 puntos) Que no sufriera retraso.
b) (1.25 puntos) Que operase en la terminal A, sabiendo que tuvo retraso.

EJERCICIO 4.

El peso de los paquetes de azúcar de una marca, medido en gramos, sigue una distribución Normal con desviación típica de 16 gramos. A partir de una muestra de 100 paquetes de azúcar de dicha marca, se obtuvo un peso medio de 247 gramos.
a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de azúcar de esa marca, con un nivel de confianza del 97%.
b) (1 punto) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el peso medio con un error máximo de 0.5 gramos, a un nivel de confianza del 95%.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Las filas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1, A_2, y A_3 en dos comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix}$.

Cati desea comprar 2 unidades del artículo A_1, 1 de A_2 y 3 de A_3.

Manuel desea comprar 5 unidades de A_1, 1 de A_2 y 1 de A_3.

Han dispuesto esas compras en la matriz Q: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1.8 puntos) Calcule $P \cdot Q^t$ y $Q \cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de las matrices resultantes.

b) (0.7 puntos) A la vista de los obtenido en el apartado anterior, ¿dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

EJERCICIO 2.

a) (1.2 puntos) Calcule los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{2-x} & si \quad x \le 1 \\ ax^2 - 3x + 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en el punto de abscisa x = 1.

b) (1.3 puntos) Para $a = 1$ y $b = 2$, estudie su monotonía y determine las ecuaciones de sus asíntotas, si existen.

EJERCICIO 3.

Marta tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro de color azul y dos pares blancos. Si decide aleatoriamente qué ponerse, determine las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) (0.8 puntos) Llevar un traje rojo y unos zapatos blancos.

b) (0.9) puntos) No ir toda vestida de blanco.

c) (0.8 puntos) Calzar zapatos azules o blancos.

EJERCICIO 4.

Se desea estimar la media de una variable aleatoria Normal cuya desviación típica es 2.5. Para ello, se toma una muestra aleatoria, obteniéndose los siguientes datos:

18 18.5 14 16.5 19 20 20.5 17 18.5 18

a) (1 punto) Determine un intervalo de confianza al 96% para la media poblacional.

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es el error máximo cometido con esa estimación?

c) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error máximo sea inferior a 1, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Un taller fabrica y vende dos tipos de alfombras, de seda y de lana. Para la elaboración de una unidad se necesita un trabajo manual de 2 horas para el primer tipo y de 3 horas para el segundo y de un trabajo de máquina de 2 horas para el primer tipo y de 1 hora para el segundo. Por cuestiones laborales y de planificación, se dispone de hasta 600 horas al mes para el trabajo manual y de hasta 480 horas al mes para el destinado a la máquina.

Si el beneficio por unidad para cada tipo de alfombra es de 150 € y 100 € respectivamente, ¿cuántas alfombras de cada tipo debe elaborar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende el mismo?

EJERCICIO 2.

La cantidad, C, que una entidad bancaria dedica a créditos depende de su liquidez, x, según la función

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{150 + 5x}{100} & si \quad 10 \le x \le 50 \\ \dfrac{200 + 10x}{25 + 3x} & si \quad x > 50 \end{cases}$$

donde C y x están expresadas en miles de euros.

a) (1 punto) Justifique que C es una función continua.

b) (1 punto) ¿A partir de qué liquidez decrece la cantidad dedicada a créditos? ¿Cuál es el valor máximo de C?

c) (0.5 puntos) Calcule la asíntota horizontal e interprételа en el contexto del problema.

EJERCICIO 3.

En una encuesta sobre la nacionalidad de los veraneantes en un municipio de la costa andaluza, se ha observado que el 40% de los encuestados son españoles y el 60% extranjeros, que el 30% de los españoles y el 80% de los extranjeros residen en un hotel y el resto en otro tipo de residencia. Se elige al azar un veraneante del municipio.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que no resida en un hotel?

b) (1 punto) Si no reside en un hotel, ¿cuál es la probabilidad de que sea español?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "ser extranjero" y "residir en un hotel"?

EJERCICIO 4.

El peso de los habitantes de una determinada ciudad sigue una ley Normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg.

a) (0.75 puntos) ¿Qué distribución sigue la media de los pesos de las muestras de habitantes de tamaño 64 extraídas de esa ciudad?

b) (1.75 puntos) Si se extrae una muestra aleatoria de tamaño 100 de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de esa muestra esté comprendido entre 64 y 65 kg?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) (1.7 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A^2 \cdot X + C = 2B$.

b) (0.8 puntos) ¿Qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que las matrices $(B + C)\cdot P$ y $B\cdot Q\cdot C^t$ sean cuadradas?

EJERCICIO 2.

De una función continua y derivable, *f*, se sabe que la gráfica de la función derivada, *f '*, es una parábola que pasa por los puntos (–1, 0) y (3, 0) y que tiene su vértice en el punto (1, –2).

a) (1.5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*, así como la existencia de extremos.

b) (1 punto) Si *f* (1) = 2, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa x = 1.

EJERCICIO 3.

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.6, \quad P(A^C \cap B^C) = 0.28.$$

a) (1 punto) Halle la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez.
b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B.
c) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

EJERCICIO 4.

Una cadena de hipermercados decide estudiar la proporción de artículos de un determinado tipo que tienen defectos en su envoltorio. Para ello, se selecciona aleatoriamente 2000 artículos de este tipo entre sus hipermercados y encuentra que 19 de ellos tienen defectos en su envoltorio.
a) (1.5 puntos) Determine un intervalo, al 95% de confianza, para la proporción real de artículos con este tipo de defecto e interprete el resultado obtenido.
b) (1 punto) ¿Cuántos artículos, como mínimo, deberá seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 1%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (1.5 puntos) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$2x - y \leq -2 \quad 4x - 2y \geq -10 \quad 5x - y \leq 4 \quad x \geq 0$$

b) (1 punto) Calcule los valores extremos de la función $F(x, y) = 6x - 3y$, en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + a & si \quad x < 2 \\ \frac{1}{x-1} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) (1.3 puntos) Calcule el valor de a para que la función sea continua en x = 2. Para ese valor de a obtenido, ¿es derivable la función en x = 2?
b) (1.2 puntos) Para a = 4, estudie la monotonía y calcule las ecuaciones de las asíntotas, si existen.

EJERCICIO 3.

El aparcamiento de una sala de conciertos está completo el 85% de los días. El 90% de los días que el aparcamiento está completo, la sala de conciertos está llena, y el 22% de los días que el aparcamiento no está completo, la sala de conciertos no está llena.
Elegido un día al azar,
a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la sala de conciertos esté llena?
b) (1 punto) Si se sabe que la sala de conciertos está llena, ¿cuál es la probabilidad de que el aparcamiento esté completo?

EJERCICIO 4.

a) (1.25 puntos) Se desea tomar una muestra aleatoria estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 46 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7500 personas, en el segundo hay 8400, en el tercero 5700 y en el cuarto 3000. Calcule el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido al azar 375 personas del primer estrato.
b) (1.25 puntos) Dada la población {2, 4, 6} construya todas las muestras posibles de tamaño 2, que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule la matriz A^{2017}.

b) (1.5 puntos) ¿Se verifica la expresión (B + A)·(B — A) = $B^2 - A^2$?

EJERCICIO 2.

Sea *f(t)* el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo *t*, medido en meses, transcurrido desde su inauguración:

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{5}{2}t^2 + 20t & si \quad 0 \le t \le 6 \\ \dfrac{90t - 240}{t+4} & si \quad\quad t > 6 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) ¿Evoluciona la función *f* de forma continua?

b) (0.5 puntos) ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?

c) (1 punto) ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40 %?

d) (0.5 puntos) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

EJERCICIO 3.

Se sabe que el 90 % de los alumnos de un centro docente está interesado por las redes sociales, el 60 % está interesado por sus notas y el 55 % por ambas cuestiones. Se elige al azar un alumno de ese centro.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho alumno esté interesado por alguna de las dos cuestiones?

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que esté interesado por sus notas, sabiendo que no está interesado por las redes sociales.

c) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que no esté interesado por ninguna de estas dos cuestiones.

EJERCICIO 4.

La altura de los estudiantes de 2° de bachillerato de un centro sigue una ley Normal de media 165 cm y desviación típica 10 cm.

a) (1 punto) ¿Qué distribución sigue la altura media de las muestras de tamaño 25?

b) (1.5 puntos) Se elige al azar una muestra de 25 estudiantes y se les mide la altura. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de esa muestra supere 160 cm?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

(2.5 puntos) Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 €. ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

EJERCICIO 2.

a) (1.5 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{e^{5x} - x}{x^2 - x} \qquad\qquad g(x) = (2x^2 - x)^3 \cdot \ln(x^3 + 2)$$

b) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa x = 1.

EJERCICIO 3.

En una ciudad hay dos fábricas de pasta, F1 y F2, que producen dos tipos de productos, A y B, que venden a un distribuidor en paquetes de 1 kg. En un mes, la fábrica F1 produce 20000 kg de pasta, de los que 12000 son del tipo A y la fábrica F2 produce 25000 kg de pasta de los que 15000 kg son del tipo A. Se escoge al azar un paquete del distribuidor.

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

b) (1 punto) Si el paquete elegido resulta ser del tipo A, ¿qué es más probable, que proceda de la fábrica F1 o que proceda de la F2?

EJERCICIO 4.

La puntuación obtenida por los participantes en una prueba es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con una desviación típica de 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 64 participantes en esa prueba, resultando una puntuación media de 35 puntos.

a) (1.25 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 95 %, para la calificación media del total de participantes en la citada prueba.

b) (1.25 puntos) Halle el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la puntuación media del total de participantes, con un error inferior a 0.5 puntos y un nivel de confianza del 99 %.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1.5 puntos) Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en cal caso, calcule el resultado: A^2 $A - B$ $A \cdot B$ $A \cdot B^t$

b) (1 punto) Halle la matriz X tal que $A^t + B \cdot X = 3B$.

EJERCICIO 2.

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.

a) (1 punto) Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -2$.

b) (1.5 puntos) Para $a = 6$ y $b = 9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

EJERCICIO 3.

Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera con México y que solo el 5 % de los que no lo votaron la apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?

b) (0.75 puntos) Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

c) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

EJERCICIO 4.

El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores:

46 38 59 29 34 32 38 21 44 34

a) (1.5 puntos) Determine un intervalo de confianza, al 95 %, para la vida media de dicha especie de tortugas.

b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98 %.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

a) (0.8 puntos) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \leq 3 \qquad 2x + y \geq 4 \qquad y \geq -1$$

b) (0.25 puntos) Razone si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

c) (1.2 puntos) Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x, y) = 5x + 4y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

d) (0.25 puntos) Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

EJERCICIO 2.

Se consideran las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{5x - 16}{x} \quad y \quad g(x) = x^2$$

a) (1 punto) Determine la abscisa del punto donde se verifique que $f'(x) = g'(x)$.

b) (1.5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x = 2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

EJERCICIO 3.

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación se extrae una segunda bola.

a) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

b) (1.25 puntos) Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

EJERCICIO 4.

En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.

a) (1.25 puntos) Determine, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

b) (1.25 puntos) Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0.2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 92.5 % calcule el tamaño mínimo de la muestra.